答疑笔记 · 概率论 第3讲（多维随机变量及其分布）

> 本文件按**题号增量追加**。已完成答疑：
> **第 2 题**（二维均匀分布 + 画图定限，含两处误解纠偏）、**第 4 题**（区域面积 ≠ 1，均匀/非均匀归一化辨析）、**第 7 题**（商分布 $Z=Y/X$ 的雅可比行列式法）。

第 2 题 · 二维均匀分布 + 画图定限

> 用户反馈：第 2 题卡住。核心卡点是**"二维均匀分布怎么定限求概率"**。本笔记把这道题的完整思考链拆开，并抽出可复用的通用套路。

题目回顾

设 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ 上服从均匀分布。
（Ⅰ）写出 $f(x,y)$；（Ⅱ）求 $P\{X+Y\le 1\}$。

一、先认题型：这是"二维均匀分布"

信号：题干出现"在区域 D 上服从**均匀分布**"。
结论：密度不是给出来的，而是**由区域反算**：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以**第一步永远是先求 D 的面积。**

二、第（Ⅰ）问：画图 → 求面积 → 写密度

把不等式翻译成图形：$0\le x\le 1$（左右夹在 0 和 1 之间）、$0\le y\le x$（在直线 $y=x$ 下方）、$y\ge 0$（在 x 轴上方）。
三者合起来是一个**三角形**，三个顶点：

$$(0,0),\quad (1,0),\quad (1,1).$$

> 记忆：**"$0\le y\le x\le 1$" = 三角形 $(0,0),(1,0),(1,1)$**，这是最高频的二维区域。

面积 $S_D=\dfrac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高 $=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$。于是

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

三、第（II）问：画图定限（真正的坎）

通用三步：

1. **画全域 D **（三角形，已画）；
2. **把条件线画上去**：$x+y=1$ 是一条斜线，过 $(0,1)$ 与 $(1,0)$；
3. **找交集 $G=D\cap\{x+y\le 1\}$：看这条线在 D 内部**从哪穿进去、又从哪穿出来。
   - 与 $y=0$（底边）交于 $(1,0)$；
   - 与 $y=x$（斜边）交于 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。
     于是 G 是三角形 $(0,0),(1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

算法 A：面积比法（均匀分布专属捷径）

$$S_G=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\qquad P\{X+Y\le 1\}=\frac{S_G}{S_D}=\frac{1/4}{1/2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

> 均匀分布 = 几何概型升维，**概率 = 面积占比**，连积分都不用算。

算法 B：积分法（通用，考场上稳妥）

$$P=\iint_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_G 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2S_G=\frac{1}{2}$$

竖直切片（要分段！）：固定 x，y 从 0 到 $\min(x,1-x)$。

- $0\le x\le\frac{1}{2}$：y 上限是 x（此时 $x<1-x$）；
- $\frac{1}{2}\le x\le 1$：y 上限是 $1-x$（此时 $1-x<x$）。

$$P=2\left[\int_0^{1/2}\int_0^{x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]=2\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{2}$$

水平切片（不用分段，更省事）：固定 y，需 $x\ge y$ 且 $x\le 1-y$，故 $x\in[y,1-y]$，且要求 $y\le 1-y$ 即 $y\le\frac{1}{2}$。

$$P=2\int_0^{1/2}\int_y^{1-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{1/2}(1-2y)\,\mathrm{d}y=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

四、你为什么卡在这里（两个坑）

坑	表现	破解
坑 1：忘记先算面积	直接把 f 写错（比如写成 $f=1$）	均匀分布**第一步必求 S_D **，$f=1/S_D$
坑 2：不画图就套上下限	竖直切片时把 y 上限一路写成 x，漏了 $x>\frac{1}{2}$ 后要换成 $1-x$	**先画图**，看条件线从哪里切断区域；切断点就是**分段点**

> **口诀**（来自 01-考点手册）：
> **求谁不积谁，不积先定限，限内画条线，先交写下限，后交写上限。**
> 再加一句：**条件线切断区域处 → 必须分段。**

五、举一反三

遇到"二维均匀 + 求区域概率"，标准动作永远是：

1. **画 D ** → 求 S_D → 写 $f = 1/S_D$；
2. **画条件曲线** → 找与 D 边界的**交点**；
3. **面积比**（最快）或 **二重积分**（保险）；
4. 积分时能换到**水平切片不分段**的方向，就别硬用竖直切片。

> 同类练手：第 8 题（圆盘均匀，改用极坐标 + 面积比）、第 15 题（三角形域上再叠加离散化）。

六、误解 1 纠偏：区域是「面」，不是「线」

用户原话：「误认为 y 是 0、1 之间的一条线，因为 x 是 0、1 的取值。」

错在哪：把 $0 \le y \le x \le 1$ **当作数轴上的不等式链**来读，于是把二维区域**降维**成了一条线段。真正的读法是"**两个变量各一个不等式**"：

$$0 \le x \le 1 \ (\text{关于 } x), \qquad 0 \le y \le x \ (\text{关于 } y).$$

正确图像（"线动成面"）：

- 固定 $x = 0.5$：$y \in [0, 0.5]$ —— 一条**竖线段**；
- 令 x 从 0 连续变到 1：这条竖线段不断变长，**扫出一个三角形** $S_D = \frac{1}{2}$。

> **铁律：不等式里有几个变量，图就画几维。**
> 一个变量 → 数轴上一段区间（长度）；两个变量 → 平面上一个区域（**面积**）。

七、误解 2 纠偏：事件必须先与 D 求交（这是分布函数法的命门）

用户原话：「没想到 $g(x,y) < z$ 要当作全集的子集来处理，以为 $x + y \le 1$ 里 x, y 的定义是实数域。」

错在哪：只把 $\{X + Y \le 1\}$ 当成写在 $\mathbb{R}^2$ 上的**几何条件**，忘了它同时是一个**随机事件**，其积分区域必须裁回 D。

正确公式（D 必须显式出现）：

$$P\{X + Y \le 1\} = \iint_{\{x+y\le 1\} \cap D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

原因：本题密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

在 D 之外 $f\equiv 0$，所以 D 就是本题的全集（样本空间），(X,Y) 的全部概率只分布在 D 内。任何事件都要"交回 D "才是真实积分域。

与「分布函数法」总思路的对接

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g\le z} f\,\mathrm{d}\sigma \xrightarrow[\text{对 } z \text{ 求导}]{} f_Z(z)$$

必须补全：$\iint_{g\le z}$ 的真实含义是 $\iint_{\{g\le z\}\cap \text{支撑集}} f\,\mathrm{d}\sigma$，本题支撑集即 D。

> 每次写 $\{g\le z\}$，**第一反应先跟 D 求交**。这正是"画图定限"背后的数学——找的就是 $\{g\le z\}\cap D$ 这块区域的形状和边界。

八、两个误解并列对照（速查）

	错误想法	实际	后果
误解 1	区域是**一条线**（读成数轴上的不等式链）	区域是**一个二维面**	S_D 求不出 → $f=1/S_D$ 写错
误解 2	条件写在**整个实数平面**上	条件须**与 D 求交**（D 是全集）	积分区域取大 → 概率算错

解题总纲：拿到题先念一句——"D 是 $0\le y\le x\le 1$ 的**三角形**，(X,Y) 只活在这个三角形里"。
这句话同时把"**范围**（形状+面积）"和"**全集**（事件要不要裁剪）"都说清了，两个坑自动规避。

> 一句话口诀：**"在 D 上分布" —— 既是范围，也是全集。**

九、第 4 题答疑：区域「面积」不是 1，也不该是 1

用户原话：「第四题是我算错了还是出错了？我算的 x,y 围成的面积的值不为 1。」

结论：**题目无误，用户算的"面积 $=\frac{1}{2}$ "也对** —— 错的只是"面积应该等于 1"这个**前提**。

症结：把「均匀分布」的规则当成了通用规则

用户把第 2 题的 $f=1/S_D$（面积进分母）套到了第 4 题。但第 4 题是**非均匀分布**，常数与面积无关。

> **归一化的对象是「密度的积分」，不是「区域的面积」**：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1, \qquad \textbf{而不是 } S_D = 1.$$

第 4 题常数 3 的来源

$$\iint_D 3x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x 3x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x\cdot x\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 3\times\frac{1}{3} = 1\ \checkmark$$

常数 3 是为使积分凑成 1 而确定的，**与 $S_D=\frac{1}{2}$ 无关。**

三题对照（关键表）

题	分布	区域面积	常数	常数来源
2	均匀（$f\equiv 2$）	$\frac{1}{2}$	$2=\frac{1}{1/2}$	常数 × 面积 = 1 $\Longrightarrow f=1/S_D$
3	非均匀（$f=cxy$）	2 （矩形）	$c=1$	$\iint cxy = c\cdot 1 = 1$，**面积 2 未进分母**
4	非均匀（$f=3x$）	$\frac{1}{2}$	3	$\iint 3x = 1$，**面积 $\frac{1}{2}$ 未进分母**

> **第 3 题是最强的反例**：面积 $=2$，若按"面积进分母"会得 $c=\frac{1}{2}$，正确答案却是 $c=1$。

附带纠正：密度可以大于 1

第 2 题 $f=2$、第 4 题 $x\to 1^-$ 时 $f=3x\to 3$，**均 > 1**，完全正常。密度不是概率，**只有积分才是概率。**须丢弃"密度值必小于 1""常数必等于 $1/$ 面积"这类直觉。

判别口诀

> **只有题干出现"在 D 上服从均匀分布"才可用 $f=1/S_D$；其余一律用 $\iint_D f=1$ 反解常数。**

第 4 题三问核对（均正确）

- （Ⅰ）$f_X(x)=\int_0^x 3x\,\mathrm{d}y = 3x^2$ （$\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=1\ \checkmark$）；$f_Y(y)=\int_y^1 3x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(1-y^2)$ （$\int_0^1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1\ \checkmark$）。
- （Ⅱ）$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{3x}{3x^2}=\dfrac{1}{x}\ (0<y<x)$ —— **是均匀的**，即 $Y\mid X=x\sim U(0,x)$。
- （Ⅲ）$P\{Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{4}\}=\int_0^{1/2}\dfrac{1}{3/4}\,\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$。

> **与第 16 题同构**：第 4 题即"条件均匀型"，$f_X(x)=3x^2$ 配 $Y\mid X=x\sim U(0,x)$，验证 $3x^2\cdot\frac{1}{x}=3x$ ✓。

十、第 7 题答疑：商的分布 $Z=Y/X$ （雅可比行列式法）

题目：$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$ 且相互独立，$Z=\dfrac{Y}{X}$。求 $f_Z(z)$ 及 $P\{Z>1\}$。

已知：$f_{XY}(x,y)=1,\ (x,y)\in(0,1)^2$。

总思路：增补变量三步法

$Z=g(X,Y)$ 只是**一个**变量，要凑成可逆变换，须**再补一个辅助变量 V：$(X,Y)\leftrightarrow(Z,V)$，用雅可比得 f_{ZV}，最后**积掉 V **。

第 ①步 • 选辅助变量

取 $V=X$ （最省事，因 $Z=Y/X$ 中已含 X）：

$$Z=\frac{Y}{X},\qquad V=X.$$

> 为什么取 $V=X$ 最省事？见下文"与商的密度公式的关系"。

第 ②步 • 反解 + 雅可比

$$x=v,\qquad y=zv.$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ v & z\end{vmatrix}=0\cdot z-1\cdot v=-v,\qquad |J|=v\ (v>0).$$

第 ③步 • 联合密度 + 定义域一起变换

$$f_{ZV}(z,v)=f_{XY}(v,zv)\cdot|J|=1\cdot v=v.$$

定义域：$0<x<1\Rightarrow 0<v<1$；$0<y<1\Rightarrow 0<zv<1\Rightarrow 0<z<\dfrac{1}{v}$。

$$f_{ZV}(z,v)=v,\qquad 0<v<1,\quad 0<z<1/v.$$

> (z,v) **平面上的积分区域**：竖条 $0<v<1$ 被曲线 $v=1/z$ 截断；$z<1$ 整条竖条可用，$z>1$ 只剩 $v\in(0,1/z)$。**支撑集在 z 方向延伸到 $+\infty$ **。

第 ④步 • 积掉 v

对固定 $z>0$，v 上限为 $\min(1,\,1/z)$：

$$f_Z(z)=\int_0^{\min(1,1/z)} v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\min\left(1,\frac{1}{z}\right)^2$$

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<z<1\\ \dfrac{1}{2z^2}, & z\geq 1\\ 0, & z<0\end{cases}}$$

自检：$\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}z+\int_1^\infty \frac{1}{2z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ✓

$P\{Z>1\}$

$$P\{Z>1\}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2z^2}\mathrm{d}z=\left[-\frac{1}{2z}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

> **几何秒验**：$Z>1 \iff Y>X$，单位正方形中 $y>x$ 的面积 $=\frac{1}{2}$ ✓。

几何对照（$F_Z(z)$ 即面积）

- $0<z<1$：直线 $y=zx$ 与右边界相交，阴影为**三角形**，面积 $=z/2$；
- $z\geq 1$：直线与上边界相交，阴影为**正方形挖去一个三角形**，面积 $=1-\dfrac{1}{2z}$。

$z=1$ **（对角线）就是"直线顶到右边"与"顶到上边"的临界点**，即分段点。

三个要点

1. **商的密度公式是雅可比的特例**：$f_Z(z)=\int|x|f(x,zx)\mathrm{d}x$ 中的 $|x|$ **就是 $|J|=v$ **。取 $V=X$ 即得该公式，**不必死背。**
2. **换辅助变量结果不变**：取 $V=Y \Longrightarrow x=v/z,\ y=v$，$|J|=\dfrac{v}{z^2}$，$f_{ZV}=\dfrac{v}{z^2}$，$v\in(0,\min(1,z))$，积分后同样得 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{2z^2}$，说明方法稳健。
3. **陷阱：EZ 不存在。**$EZ=\frac{1}{4}+\int_1^\infty \frac{1}{2z}\mathrm{d}z=+\infty$（重尾 $\sim\frac{1}{2z^2}$）。**比值型分布一阶矩常发散**，此题只能求密度/概率，勿顺手算 EZ。

易错点清单

1. 雅可比必须用 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)}$ **（反解的行列式）**，方向别反；
2. **定义域必须一起变换**（$0<zv<1$）——分段就在这里；
3. 积分上限是 $\min(1,1/z)$，**分界点 $z=1$ **；
4. f 在正方形外为 0，支撑集别漏。

十一、第 7 题补充：两个基本功（雅可比排列 & z 的取值范围）

用户反馈两处不会：①雅可比行列式**每一项怎么排**记不住；②z **的取值范围不会算。**

基本功 A：行列式的元素排列 —— 「分子排成行，分母排成列」

记号 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)}$ **本身就把答案写好了**：

- **分子** (x,y) → **决定行**（第 1 行 x，第 2 行 y）；
- **分母** (z,v) → **决定列**（第 1 列对 z，第 2 列对 v）；
- **第 i 行第 j 列** = 分子第 i 个变量**对**分母第 j 个变量求偏导。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},\qquad \text{展开}=(\partial_z x)(\partial_v y)-(\partial_v x)(\partial_z y).$$

方向问题：两个雅可比互为倒数 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$；密度公式要的是 $\left|\dfrac{\partial(\text{旧})}{\partial(\text{新})}\right|$（即 $dx\,dy=|J|\,du\,dv$ 中的因子）。

> ⚡ **考场捷径**：**哪边好算先算哪边，最后取倒数。**
> 本题 $u=y/x,\ v=x$ 由 x,y **直接给出**，故先算正方向：
>
> $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{x}\ \Longrightarrow\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{|-1/x|}=|x|=v\ \checkmark$$
>
> 与反解路线（得 $-v$）一致。

> 🛡️ **定心丸**：公式取 $|J|$ **（绝对值）**，所以**分子内部、分母内部谁先谁后都无所谓**（写反只差一个负号）；**唯一不能错的是"方向"**——分子分母整体颠倒必须**取倒数**。

基本功 B：z 的取值范围 —— 四步法

核心：Z 的取值范围 = **让不等式组有解的那些 z（即把区域投影到 z 轴）**。

1. **抄全 $f\neq 0$ 的不等式**（唯一信息来源）：$0<x<1,\ 0<y<1$；
2. **逐条翻译**（反解 $x=v,\ y=zv$）：$0<x<1\to 0<v<1$；$0<y<1\to 0<zv<1$；
3. **解出 v 的范围**：$0<zv<1\Rightarrow 0<z<1/v\Rightarrow v<1/z$，合并得
$$0<v<\min\left(1,\ \frac{1}{z}\right)$$
4. **"上界 > 下界" $\Longrightarrow$ z 的范围**：$\min(1,1/z)>0\iff z>0$，故 $z\in(0,+\infty)$。

> ⚠️ **除 v 之前必须确认 v 的符号**：若 v 可负，除过去要**变号**并分类讨论。本题 $v=x\in(0,1)>0$，安全。

💡 **关键洞察：那个 $\min$ 一次干了两件事**

看 $\min(1, 1/z)$ 的什么	得到什么
非空性（上界 > 0 ）	z 的取值范围 $z > 0$
切换点（1 与 $1/z$ 交点 $z = 1$ ）	f_Z 的**分段点** $z = 1$

⇒ **范围与分段不必分两处算**，写成一个 $\min$ 表达式即可一次到手。

备用视角：Z 的范围 = g 在支撑集上的**值域**；上下界出现在**边界/退化处。**$z = y/x$：$y \to 0^+$ 给下确界 0；$x \to 0^+$ 给上确界 $+\infty$ 。

举一反三（同一正方形 $(0,1)^2$ ）：$X + Y \in (0, 2)$ 、$XY \in (0, 1)$ 、$Y/X \in (0, +\infty)$ **。分式型只要分母能趋于 0，范围即无界。**