第二次模拟 · 数学一

22 题 / 150 分 / 180 分钟 · 目标难度略高于真题平均水平

科目	题号	分值
高等数学（86 分）	第 1—4、11—14、17—20 题	4×5 + 4×5 + 10 + 3×12 = 86
线性代数（32 分）	第 5—7、15、21 题	3×5 + 5 + 12 = 32
概率论与数理统计（32 分）	第 8—10、16、22 题	3×5 + 5 + 12 = 32

做题说明

1. 本卷为**做题版**：每道题独占一整页，题目下方为留白答题区，可直接打印书写。
2. 选择题（1—10）每题 5 分，填空题（11—16）每题 5 分，解答题（17—22）共 70 分（17 题 10 分、18—22 每题 12 分，见题面标注）。
3. 建议 180 分钟内闭卷完成；完成后对照「02a-客观题 / 02b-解答题」批改，错题回翻对应考点手册条目。
4. 本页之后的每一页即一道题，从下一页开始作答。

数学一 · 第二次模拟试卷

卷面规格照 2022—2025 年真题：选择题 10 题（每题 5 分，共 50 分）、填空题 6 题（每题 5 分，共 30 分）、解答题 6 题（17 题 10 分，18—22 题每题 12 分，共 70 分），满分 150 分，建议用时 180 分钟。

科目配比照真题：高等数学 86 分、线性代数 32 分、概率论与数理统计 32 分。

> **难度**：本卷目标是**略高于真题平均水平**——计算量比卷一多一步、干扰项比卷一更刁。做不出不代表没掌握，先画圈，回头补考点。

怎么用这份卷子

这不是估分卷，是**串知识点**用的。三遍：

1. **限时盲做**（180 分钟，一次做完，不查书）。做不出来就在题号上画圈，别停。
2. **对解析**（02a 客观题解析 ｜ 02b 解答题解析）。每道题只问一句："我卡在哪一步？"是没想到方法，还是想起了但算错。
3. **读手册的"坑"**（高数 ｜ 线代 ｜ 概率）。每题末尾的"考点"直接跳到对应条目，**只看该条的坑，不看定义**——定义你已经会了，丢分都在坑上。

带 ▵ 的是本次预测的高概率位置，盲做时优先保证这些题。

一、选择题（1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. △ 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在且有限，则（　）

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限

(B) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2. △ 设 $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ （$n\geqslant 1$），$v_n=(-1)^n\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ （$n\geqslant 1$），则级数（　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 条件收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均发散

3. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，则下列命题中正确的是（　）

(A) 若 f 在点 $(0,0)$ 沿任何方向的方向导数都存在且相等，则 f 在点 $(0,0)$ 可微

(B) 若 f 在点 $(0,0)$ 可微，则 f 在点 $(0,0)$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且等于 $\nabla f(0,0)\cdot\dfrac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}$

(C) 若 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ 且 f 在点 $(0,0)$ 连续，则 f 在点 $(0,0)$ 可微

(D) 若 f 在点 $(0,0)$ 可微，则 f_x 与 f_y 在点 $(0,0)$ 都连续

4. △ 设 D 为圆域 $x^2+y^2 \leqslant 2x$，则二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma =$ （　）

(A) $\dfrac{8\pi}{3}$

(B) $\dfrac{16}{3}$

(C) 8

(D) $\dfrac{32}{9}$

5. △ 下列矩阵中**不能**相似于对角矩阵的是（　）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. △ 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$（　）（k 为任意实数）

(A) $k(1,1,0)^{\mathrm{T}}$

(B) $k(2,3,3)^{\mathrm{T}}$

(C) $k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$

(D) $k(1,2,1)^{\mathrm{T}}$

7. 设 A, B 为 n 阶实矩阵，O 为 n 阶零矩阵，则下列等式**不成立**的是（　）

(A) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

(B) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 2r(A)$

(C) $r\begin{pmatrix} A & A^2 \\ O & O \end{pmatrix} = 2r(A)$

(D) $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & AB \end{pmatrix} = r(A) + r(AB)$

8. △ 设 (X,Y) 服从二维正态分布，$EX=EY=0$，$DX=DY=2$，相关系数 $\rho=\dfrac{1}{2}$，且 $a^2+b^2=1$，则 $D(aX+bY)$ 的最大值为（　）

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 1

9. △ 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1,\dots,Y_m$ 是来自总体 $N(\mu_2,4\sigma^2)$ 的简单随机样本，两组样本相互独立，S_1^2,S_2^2 分别为两组样本方差。则下列统计量中服从 $F(n-1,m-1)$ 分布的是（　）

(A) $\dfrac{4S_1^2}{S_2^2}$

(B) $\dfrac{4(m-1)S_1^2}{(n-1)S_2^2}$

(C) $\dfrac{(n-1)S_1^2}{(m-1)S_2^2}$

(D) $\dfrac{(m-1)S_1^2}{(n-1)S_2^2}$

10. ▵ 设 $X_1,\ldots,X_{100}$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，对假设检验问题

$$H_0:\mu\leqslant 10,\qquad H_1:\mu>10,$$

取拒绝域 $W=\{\bar{X}\geqslant 10.2\}$。当 $\mu=10.4$ 时，犯第二类错误的概率为（　）

(A) $1-\Phi(0.5)$

(B) $1-\Phi(1)$

(C) $1-\Phi(1.5)$

(D) $1-\Phi(2)$

二、填空题（11—16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. △ 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+2x)$ 与 $g(x) = \mathrm{e}^{x^2} - \cos 2x$ 是等价无穷小，则 $ab =$ _____。

12. △ 设 $f(x)=x^2\ \ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 为其和函数，则 $S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=$_____。

13. 设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，且 $\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=2\,\mathrm{d}u+3\,\mathrm{d}v$ 。若 $y=f(\cos 2x,\,1+x^2)$ ，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$ _____ 。

14. △ 反常积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} =$ _____。

15. △ 设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶实矩阵，每行元素之和均为 3，且 $|A|=2$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ _____ 。

16. △ 设 A, B 为相互独立的事件，$P(A)=3P(B)$，且 $P(A\cup B)=\dfrac{13}{16}$，则在 A, B 至少有一个发生的条件下，恰有一个发生的概率为 _____ 。

三、解答题（17—22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）△

求微分方程 $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解，并求 $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x^4}$ 。

18.（本题满分 12 分）

设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$ 。

（Ⅰ）求 f 的极值;

（Ⅱ）求 f 在闭区域 $D=\{(x,y):x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 2\}$ 上的最大值与最小值。

19.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶连续可导。

（Ⅰ）若 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f(2)+f(-2)}{4}$；

（Ⅱ）若 f 在 $(-2,2)$ 内取得极值，证明：存在 $\eta\in(-2,2)$，使得 $|f''(\eta)|\geqslant\dfrac{|f(2)-f(-2)|}{8}$。

20.（本题满分 12 分）△

设 L 为平面 $x+y+z=1$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截得的曲线，取从 z 轴正向看为逆时针方向，计算

$$I=\oint_L (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z.$$

21.（本题满分 12 分）△

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ （$n=0,1,2,\dots$）满足

$$x_{n+1}=3x_n+y_n,\qquad y_{n+1}=2x_n+2y_n,$$

且 $x_0=1$，$y_0=0$。

（Ⅰ）求矩阵 A，使 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，并求 A^n；

（Ⅱ）求 x_n,y_n 的通项公式。

22.（本题满分 12 分）△

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}c\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 c 为常数。

（Ⅰ）求常数 c；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，并判断 X 与 Y 是否独立；

（Ⅲ）求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度。

交卷后

答案与逐题解析见 02a 客观题解析 ｜ 02b 解答题解析。本卷的命题依据、考点配比与预测理由见 06-考点预测与分布——如果时间紧，**只看那一份的"预测"三列**，比刷题划算。