数学一 · 第三次模拟试卷

> **卷面规格照 2021—2025 年真题**：选择题 10 题（每题 5 分，共 50 分）、填空题 6 题（每题 5 分，共 30 分）、解答题 6 题（17 题 10 分，18—22 题每题 12 分，共 70 分），满分 150 分。
>
> 科目配比照真题：高等数学 86 分、线性代数 32 分、概率论与数理统计 32 分。
>
> **难度**：比真题平均高约半档，也比前两卷再高半档。抬难度的方式只有两条——**多一步转化**（欧拉方程要先换元、高斯要先补面、二次型要先定参再正交化）、**多一层辨析**（抽象幂级数、反常积分两端、幂等矩阵的秩）。题量没加，时间却建议给到 200 分钟：这三处转化是硬耗时的。

怎么用这份卷子

1. **限时盲做**（200 分钟一次做完，不查书）。做不出来画圈，别停，也别在一道题上耗超过 15 分钟。
2. **对解析**（02a 客观题解析 ｜ 02b 解答题解析）。只问一句：卡在**想不到方法**，还是**想到了但算错**。这两类错，补法完全不同。
3. **查手册的坑**（高数 ｜ 线代 ｜ 概率）。只看"坑"那两行，定义你已经会了。

一、选择题（1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的（　）

（A）二阶无穷小

（B）四阶无穷小

（C）五阶无穷小

（D）三阶无穷小

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则该幂级数在 $x=0$ 处（　）

（A）条件收敛

（B）绝对收敛

（C）发散

（D）敛散性不能确定

3. 设 p,q 为常数且 $q>0$，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则（　）

（A）$-1<p<q-1$

（B）$p<q-1$

（C）$-1<p<q$

（D）$p>-1$

4. 设函数 P, Q, R 在空间区域 Ω 内有连续偏导数，Σ 为 Ω 内的分片光滑曲面。则下列命题中正确的是（　）

(A) 若在 Ω 内处处有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 内与路径无关

(B) 若 $\displaystyle\iint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，则在 Σ 上恒有 $R \equiv 0$

(C) 若对 Ω 内任一闭曲线 L 都有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$，则 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 内是某二元函数的全微分

(D) 若 Σ 为闭曲面且取内侧，则 $\displaystyle\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathrm{d}V$

5. 设 A 为 3 阶矩阵，其特征值为 $1, -1, 2$，则 $|A^2 - 2A + 3E| =$ （　）

(A) 12

(B) 36

(C) -36

(D) 0

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵，则齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件是（　）

(A) $r(A) = r(B)$

(B) $AB = O$

(C) $r(A) = r(B) = n$

(D) 存在可逆矩阵 P 使 $A = PB$

7. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 = A$，则下列结论中一定成立的是（　）

(A) $r(A) + r(A - E) = n$

(B) $r(A) = r(A - E)$

(C) $r(A) + r(A - E) = 2n$

(D) $A = E$

8. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 2$，方差 $D(X) = 1$，则由切比雪夫不等式可得 $P\{-1 < X < 5\} \geqslant$（　）

(A) $\dfrac{1}{9}$

(B) $\dfrac{3}{4}$

(C) $\dfrac{8}{9}$

(D) $\dfrac{2}{3}$

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为：$P\{X = -1, Y = 0\} = 0.2$，$P\{X = -1, Y = 1\} = 0.4$，$P\{X = 1, Y = 0\} = 0.3$，$P\{X = 1, Y = 1\} = 0.1$，则（　）

(A) X 与 Y 不相关，且相互独立

(B) X 与 Y 相关，且不相互独立

(C) X 与 Y 不相关，但不相互独立

(D) X 与 Y 相关，且相互独立

10. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2 未知，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差。则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　）

(A) $\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(B) $\bar{X}\pm u_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(C) $\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(D) $\bar{X}\pm t_{\alpha}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

二、填空题（11—16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=$ _____ 。

12. 设 $f(x)=x^2$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$）的余弦级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ _____ 。

13. 曲面 $z=x^2+2y^2$ 上使切平面平行于平面 $2x+4y-z=0$ 的切平面方程为 _____ 。

14. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=$ _____ 。

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维列向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|=$ _____ 。

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，且 $P\{X>1\}=\mathrm{e}^{-2}$，则 $P\{X\leqslant 2\mid X>1\}=$ _____ 。

三、解答题（17—22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）

求欧拉方程 $x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$ （$x>0$）满足 $y(1)=1$、$y'(1)=1$ 的特解。

18.（本题满分 12 分）

设 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$。

（Ⅰ）求 f 的极值；

（Ⅱ）求 f 在闭区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 2\}$ 上的最大值与最小值。

19.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$。

（Ⅰ）证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f''(\eta)\leqslant -2$。

20.（本题满分 12 分）

设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，计算

$$I=\iint_{\Sigma} xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

21.（本题满分 12 分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a\big(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\big),$$

其中 a 为常数。

（Ⅰ）求 a 的取值范围，使 f 正定；

（Ⅱ）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，把 f 化为标准形，并写出正交矩阵 Q；

（Ⅲ）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，判断二次曲面 $f=1$ 的类型。

22.（本题满分 12 分）

设总体 X 在 $(0,\theta)$ 上服从均匀分布，$\theta>0$ 未知，$X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本。

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

（Ⅲ）判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是否无偏，若有偏则给出无偏修正；

（Ⅳ）在无偏估计中比较 $\hat{\theta}_1$ 与修正后的 $\hat{\theta}_2$ 的方差（$n\geqslant 2$）。

答案与解析 · 客观题

试卷见 01-模拟卷，解答题解析见 02b，考点细讲见 高数 ｜ 线代 ｜ 概率。

答案速查

题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	D	B	A	C	B	D	A	C	B	A

题	11	12	13	14	15	16
答	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{\pi^2}{3}$	$2x+4y-z=3$	$\frac{\pi^2}{4}$	4	$1-\mathrm{e}^{-2}$

解答题要点：17 特解 $y=\left(1-\ln x+\frac{(\ln x)^3}{6}\right)x^2$；18 极小值 -1，闭区域上最大值 7、最小值 -1；20 $I=\frac{2\pi}{3}$；21 $-\frac{1}{2}<a<1$，标准形 $2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$，椭球面；22 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$，$\hat{\theta}_2=X_{(n)}$，修正 $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$。

一、选择题

第 1 题 · D

怎么想：求"无穷小的阶"，不必把积分算出来，只要**被积函数的主部**。

$x\to 0$ 时 $\ln(1+t^2)\sim t^2$，故

$$\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{\sin^3 x}{3}\sim\frac{x^3}{3},$$

所以 $f(x)$ 是 x 的**三阶**无穷小，选 D。

归因：错选 A 的多半是把 $\ln(1+t^2)$ 当成了 $\ln(1+t)\sim t$，于是得二阶。这是本卷第一道"看起来会、其实考等价替换精度"的题。→ H01

第 2 题 · B

怎么想："条件收敛"是唯一能把 R 钉死的条件——它同时说明"收敛"和"不绝对收敛"。

中心是 $x_1=1$，在 $x=3$ 处条件收敛，故 $R=|3-1|=2$。而 $x=0$ 到中心的距离是 $1<2$，落在收敛区间内部，故**绝对收敛**，选 B。

归因：选 D 的人把"条件收敛"只用了"收敛"那一半，于是只得到 $R\geqslant 2$，$x=0$ 处就成了"不确定"。**差的就是"不绝对收敛"这四个字。**→ H02

第 3 题 • A

怎么想：0 与 $+\infty$ 两端各自收敛，取交集。

- $x \to 0^+$：$\dfrac{x^p}{1+x^q} \sim x^p$，需 $p > -1$；
- $x \to +\infty$：$\dfrac{x^p}{1+x^q} \sim x^{p-q}$，需 $p-q < -1$，即 $p < q-1$。

合起来 $-1 < p < q-1$，选 A。

归因：只判一端就选 B 或 D。这两个都是**必要条件**（只说了一半），只有两端都满足才是充要。→ H03

第 4 题 • C

怎么想：逐个找反例，能找到反例就是错的。

- （C）对：闭曲线积分恒为零 $\iff$ 与路径无关 $\iff$ 存在原函数 u 使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$。**这条不需要单连通。**
- （A）错：$P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$、$Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ 在挖去原点的区域上满足 $P_y = Q_x$，但绕原点一圈的积分是 $2\pi \neq 0$。**缺"单连通"。**
- （B）错：Σ 取球面、$R = x$，则 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$（前后两半相消），但 R 并不恒为零。**积分是代数和，可以正负抵消。**
- （D）错：取内侧要加负号，应为 $-\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$。

归因：选 A 是只背了"$P_y = Q_x$ 判路径无关"，忘了单连通这个前提。这道题四个选项各对应一条被漏掉的前提，**是概念清单的体检题**。→ H04

第 5 题 • B

怎么想：$f(A)$ 的特征值是 $f(\lambda)$，行列式是它们的乘积。

$f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$，代入 $1, -1, 2$ 得 $2, 6, 3$，故 $|A^2 - 2A + 3E| = 2 \times 6 \times 3 = 36$，选 B。

归因：错选 A 的多半是漏乘了某个因子，或把 $3E$ 当成 3λ 代入得 $1 - 2 + 3\lambda$ 之类。E **对应常数，而非** λ **本身**。→ L01

第 6 题 • D

怎么想：解空间相同 $\Rightarrow$ 行空间相同 $\Rightarrow$ 行向量组等价 $\Rightarrow$ 存在可逆 P 使 $A = PB$。

选 D。（A）只保证秩相同（维数相同），解空间位置可以不同；（B）$AB = O$ 只说明 B 的列在 A 的零空间里；（C）$r = n$ 时两者都只有零解，但那只是同解的一个**特例**，不是充要。

归因：选 A 是最经典的错——**秩相同不等于同解**。反例：$A = \operatorname{diag}(1, 0)$ 与 $B = \operatorname{diag}(0, 1)$，秩都是 1，解一个是 x_2 自由、一个是 x_1 自由。→ L02

第 7 题 • A

怎么想：$A(A-E)=O$ 给上界，$A-(A-E)=E$ 给下界，两头夹。

由 $A(A-E)=O$ 得 $r(A)+r(A-E)\leqslant n$；又 $r(A)+r(A-E)\geqslant r\big(A-(A-E)\big)=r(E)=n$。故 $r(A)+r(A-E)=n$，选 A。

归因：选 B 是凭感觉，$A^2=A$ 推不出 $r(A)=r(A-E)$（取 $A=\mathrm{diag}(1,0)$：$r(A)=1$，$r(A-E)=1$ 恰好相等，但取 $A=\mathrm{diag}(1,1,0)$ 就差开了）。**用特例验选项时，验"成立"不算数，要验"不成立"才有杀伤力。**→ L03

第 8 题 • C

怎么想：把事件写成"偏离期望不超过 ε "的形状。

$-1<X<5$ 即 $|X-2|<3$，故

$$P\{-1<X<5\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{3^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

选 C。

归因：选 A 是把上下界记反了（$\geqslant$ 配区间内）。区间不对称时先算中心与半径，这是唯一不犯错的办法。→ P01

第 9 题 • B

怎么想：离散表只做四件事——边缘、$E(XY)$、Cov、验独立。

边缘：$P\{X=-1\}=0.6$、$P\{X=1\}=0.4$；$P\{Y=0\}=0.5$、$P\{Y=1\}=0.5$。故 $E(X)=-0.2$、$E(Y)=0.5$。

$$E(XY)=(-1)(1)(0.4)+(1)(1)(0.1)=-0.3,\qquad \mathrm{Cov}=-0.3-(-0.2)(0.5)=-0.2\neq 0.$$

故**相关**。又 $P\{X=-1,Y=0\}=0.2\neq 0.6\times 0.5=0.3$，故**不独立**。选 B。

归因：选 C 的错在 $E(XY)$ ——用了 $E(X)E(Y)$，那是独立才成立的公式。选 D 逻辑上不可能：相关必然不独立。→ P02

第 10 题 • A

怎么想：三看——σ^2 未知用 t；置信区间必双侧，用 $\alpha/2$；自由度 $n-1$。

选 A。B 用 u（σ^2 已知才用）；C 自由度写成 n；D 用了单侧分位数 t_α，区间会偏窄、置信度不足。

归因：错选 C 的最多——t **分布自由度随样本量减一**，减掉的那个自由度被 $\bar{X}$ 占掉了。→ P03

二、填空题

第 11 题

答案：$\dfrac{2}{\pi}$。

怎么想：$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2n}$ 的通项是 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{k}{n}\right)$，即 $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0,1]$ 上的黎曼和。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\int_0^1\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

归因：把分点写成 $\frac{k}{n}$ 却忘了被积函数里还带 $\frac{\pi}{2}$，直接积 $\sin x$ 得 $1-\cos 1$ ——这是最集中的错法。→ H05

第 12 题

答案：$-\dfrac{\pi^2}{3}$。

怎么想：求系数和不必算每个 a_n，在 $x=0$ 处让级数等于函数值。

余弦级数在 $x=0$ 处收敛到 $f(0)=0$，故

$$0=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\qquad \frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\dfrac{\pi^2}{3}$。

验算：$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}$，故 $\sum a_n=4\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=4\cdot\Big(-\dfrac{\pi^2}{12}\Big)=-\dfrac{\pi^2}{3}$，一致。

归因：把 a_0 与 $\frac{a_0}{2}$ 混用，答案变成 $-\frac{2\pi^2}{3}$；或者硬算 $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ 却记错这个经典值。→ H06

第 13 题

答案：$2x+4y-z=3$。

怎么想：把曲面写成 $F=z-x^2-2y^2=0$，法向量 $\boldsymbol{n}=(-2x,-4y,1)$，与目标平面法向量 $(2,4,-1)$ 平行。

令 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,4,-1)$，第三分量给 $k=-1$，故 $x_0=1$、$y_0=1$、$z_0=1+2=3$。

切平面：$2(x-1)+4(y-1)-(z-3)=0$，即 $2x+4y-z=3$。

归因：直接用 $z=f(x,y)$ 的法向量 $(f_x,f_y,-1)=(2,4,-1)$ 去点斜式，**符号与 $(-f_x,-f_y,1)$ 相反**，写成 $2x+4y-z=-3$。两种写法都能用，但必须自始至终用同一种。→ H07

第 14 题

答案：$\dfrac{\pi^2}{4}$。

怎么想：$\int_0^{\pi} x\,g(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 的标准套路是 $x \to \pi - x$ 对称化：

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

再令 $u = \cos x$：

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

归因：$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 算成 $\frac{\pi}{2}$（与 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 混）是最常见的一处；另外 $u = \cos x$ 的限是 $1 \to -1$，别忘了 $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ 正好抵消反向。→ H08

第 15 题

答案：4。

怎么想：和向量组写成"原向量组 × 系数矩阵"：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)C, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|C| = 2$，故所求 $= 2 \times 2 = 4$。

归因：系数矩阵按行填（写成转置）不影响本题结果（本题 C 的行列式与转置相同），但换成别的组合就会错，**习惯要按列填**：新向量 = 原向量组的线性组合，系数就是该列。→ L04

第 16 题

答案：$1 - \mathrm{e}^{-2}$。

怎么想：先用 $P\{X>1\}$ 定参数，再用无记忆性。

$P\{X>1\} = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-2}$，故 $\lambda = 2$。条件在 $X>1$ 上，等价于从 1 处**重新计时**：

$$P\{X \leqslant 2 \mid X>1\} = P\{X \leqslant 1\} = 1 - \mathrm{e}^{-2}.$$

验算：$\frac{P\{1<X\leqslant 2\}}{P\{X>1\}} = \frac{\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}} = 1-\mathrm{e}^{-2}$，一致。

归因：写成 $P\{X\leqslant 2\} = 1-\mathrm{e}^{-4}$ ——那是无条件概率，漏了"已等过 1 个单位时间"这个信息。→ P04

错题归因表

对完答案后，把自己的错按这张表归类，**同类错超过两题就说明是那一块的思维习惯问题，不是粗心。**

错因	对应题	补法
只用了条件的一半（条件收敛只当收敛用）	2	背"条件收敛 = 收敛且不绝对"，它是唯一钉死 R 的条件
只判一端 / 只验必要条件	3	反常积分一律"两端各判一次，取交集"
定理前提漏一条（单连通 / 外法向）	4	每条积分定理都问一句"前提是什么"
秩相同当作同解	6	记"同解 $\Longleftrightarrow$ 行向量组等价"
用特例验选项时只验成立	7	验证选项要"找反例"，不是"找例子"
分布/分位数/自由度记混	10	统计量三件套：分布、分位数、自由度
期望的乘法乱用（$E(XY)=E(X)E(Y)$）	9	只有独立才能拆
参数化后忘了几何量的换算	11、14	换元先改限，再改微分

答案与解析 · 解答题

客观题见 02a。本卷解答题的难点全部集中在**第一步的转化**：欧拉方程要换元、高斯要补面、二次型要先用特征值定参。第一步对了，后面都是标准流程。

第 17 题（10 分）

怎么想：$x^2y''-3xy'+4y$ 是标准欧拉方程的形状（每项"导数阶数 = x 的幂次"）。令 $x=\mathrm{e}^t$，即 $t=\ln x$，记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则

$$xy'=Dy,\qquad x^2y''=D(D-1)y.$$

解：代入并把右端 $x^2\ln x=\mathrm{e}^{2t}\cdot t$ 换过去：

$$\big[D(D-1)-3D+4\big]y=t\,\mathrm{e}^{2t}\ \Longrightarrow\ (D-2)^2y=t\,\mathrm{e}^{2t}.$$

齐次：特征方程 $(r-2)^2=0$，$r=2$ 二重，$y_h=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}$。

特解：右端含因子 t（一重），而 2 是二重特征根，故令 $y_p=\mathrm{e}^{2t}u(t)$，此时 $(D-2)^2\big(\mathrm{e}^{2t}u\big)=\mathrm{e}^{2t}u''$，于是

$$u''=t\ \Longrightarrow\ u=\frac{t^3}{6},\qquad y_p=\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^{2t}.$$

通解：$y=\Big(C_1+C_2t+\dfrac{t^3}{6}\Big)\mathrm{e}^{2t}$，回代 $t=\ln x$：

$$y=\Big(C_1+C_2\ln x+\frac{(\ln x)^3}{6}\Big)x^2.$$

定常数：$y(1)=1\Rightarrow C_1=1$。

$$y'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\Big[C_2+\frac{t^2}{2}+2\Big(C_1+C_2t+\frac{t^3}{6}\Big)\Big]\mathrm{e}^{2t},$$

在 $t=0$ 处取值 $=C_2+2C_1=1$，故 $C_2=-1$。**特解**

$$y=\Big(1-\ln x+\frac{(\ln x)^3}{6}\Big)x^2.$$

给分点：换元并写出 $x^2y''=D(D-1)y$ 2 分 | 齐次通解 2 分 | 特解（含"重根 + 一重因子"的判断）3 分 | 定 C_1,C_2 2 分 | 回代成 x 的表达式 1 分。

归因：① 算完 t 的表达式就交卷，忘了回代 $t=\ln x$ —— 这是欧拉方程最典型的失分；② 用 $y'(1)$ 时把 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$ 直接当 $y'(1)$，本题 $\frac{1}{x}=1$ 恰好蒙对，换个点就错；③ 特解设成 $\mathrm{e}^{2t}(At+B)$，忘了重根要乘 t^2 起步的规律。→ H09

第 18 题（12 分）

怎么想：两部分是两套流程——内部看驻点 + 判别式，边界参数化成一元函数。**闭区域最值必须两者都比。**

（Ⅰ）求极值

$$f_x = 4x^3 - 4y, \qquad f_y = 4y^3 - 4x.$$

令 $f_x = f_y = 0$：由第一式 $y = x^3$，代入第二式得 $x = x^9$，即 $x\left(x^8 - 1\right) = 0$，实根 $x = 0, \pm 1$。驻点为 $(0,0)$、$(1,1)$、$(-1,-1)$。

二阶偏导 $A = f_{xx} = 12x^2$、$B = f_{xy} = -4$、$C = f_{yy} = 12y^2$，判别式

$$AC - B^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- $(0,0)$：$AC - B^2 = -16 < 0$，**不是极值点**；
- $(1,1)$ 与 $(-1,-1)$：$AC - B^2 = 128 > 0$ 且 $A = 12 > 0$，都取**极小值**，$f(\pm 1, \pm 1) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1$。

故 f 在 $(1,1)$ 与 $(-1,-1)$ 处取极小值 -1，**无极大值**。

（Ⅱ）闭区域最值

内部极小值 -1，下面看边界 $x^2 + y^2 = 2$。令 $x = \sqrt{2}\cos\theta$、$y = \sqrt{2}\sin\theta$，记 $s = \sin 2\theta$，利用

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{s^2}{2}, \qquad 2\cos\theta\sin\theta = s,$$

得

$$f = 4\left(1 - \frac{s^2}{2}\right) - 4\cdot(2\cos\theta\sin\theta) + 1 = 4 - 2s^2 - 4s + 1 = 5 - 2s^2 - 4s, \quad s \in [-1,1].$$

$g(s) = 5 - 2s^2 - 4s$ 开口向下、对称轴 $s = -1$，故

$$g(-1) = 7, \qquad g(1) = -1.$$

$s = -1$ 对应 $\sin 2\theta = -1$，即 $(x,y) = (1,-1)$ 或 $(-1,1)$；$s = 1$ 对应 $(1,1)$ 或 $(-1,-1)$。

答案：最大值 7（在 $(1,-1)$ 与 $(-1,1)$ 处取得），最小值 -1（在 $(1,1)$ 与 $(-1,-1)$ 处取得）。

给分点：驻点 3 分｜判别式与极值结论 3 分｜边界参数化并化为 s 的一元函数 3 分｜最值及取点 3 分。

归因：① 只做（Ⅰ）就把（Ⅰ）的 -1 当最小值、把"无极大值"当成"最大值不存在"——**闭区域最值必须单独算边界**；② 边界上 $\cos^4 + \sin^4$ 与 $\cos\theta\sin\theta$ 分别处理，结果里留两个三角函数没法求最值，**必须统一成 $\sin 2\theta$ 这一个变量**；③ 忘了（Ⅰ）的极小值点恰好在边界上，两处答案重复，写的时候要说明。→ H10

第 19 题（12 分）

怎么想：（Ⅰ）是罗尔定理的白送分；（Ⅱ）要用**二阶**导数的信息，只能靠带拉格朗日余项的泰勒公式，展开中心选 $x = 1$（到两个端点等距，一阶项可相消）。

（Ⅰ） f 在 $[0,2]$ 上连续、在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0) = f(2) = 0$。由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,2)$ 使 $f'(\xi) = 0$。

（Ⅱ） 在 $x = 1$ 处分别对端点 0 与 2 写泰勒公式（$\xi_1 \in (0,1)$、$\xi_2 \in (1,2)$）：

$$f(0)=f(1)+f'(1)(0-1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-1)^2=1-f'(1)+\frac{f''(\xi_1)}{2},$$
$$f(2)=f(1)+f'(1)(2-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-1)^2=1+f'(1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}.$$

由 $f(0)=f(2)=0$，两式**相加**消去 $f'(1)$：

$$0=2+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\implies f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=-4.$$

若 $f''(\xi_1)$ 与 $f''(\xi_2)$ 都大于 -2，则其和大于 -4，与上式矛盾。故两者中至少有一个 $\leqslant -2$，取该点为 $\eta\in(0,2)$，即得 $f''(\eta)\leqslant -2$。■

给分点：（Ⅰ）3 分（验证罗尔三个条件 1 分，结论 2 分）｜（Ⅱ）两处泰勒展开各 2 分｜相加得 -4 共 2 分｜反证得出"至少一个 $\leqslant -2$ " 3 分。

归因：① 用一次拉格朗日中值定理去证二阶导数的界——**余项阶数不够**，永远证不出；② 展开中心选错（选 0 或 1 以外的点），一阶项消不掉；③ 从"和为 -4 "直接写"存在 η 使 $f''(\eta)=-2$ "——错在**两个 ξ 未必是同一点**，只能得到不等式；④ 忘了说明 ξ_1,ξ_2 落在 $(0,2)$ 内。→ H11

第 20 题（12 分）

怎么想：Σ 是上半球面，**缺底面圆盘，不闭合**，高斯公式用不上。先补面，再用"闭曲面通量 − 补面通量"。

解：设 Σ_1 为平面 $z=0$ 上的圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$，取**下侧**，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成上半球体 V 并取外侧。

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial(xz^2)}{\partial x}+\frac{\partial(yz^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^3)}{\partial z}=z^2+z^2+3z^2=5z^2.$$

高斯公式：

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V 5z^2\,\mathrm{d}V.$$

球坐标（$0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，其中 $z=r\cos\varphi$）：

$$\iiint_V 5z^2\,\mathrm{d}V=5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=5\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2\pi}{3}.$$

补面 Σ_1 上 $z=0$，被积函数第三项为 $z^3=0$；又 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$（平面 $z=0$ 上），故补面通量为 0。

$$I=\frac{2\pi}{3}-0=\frac{2\pi}{3}.$$

给分点：判断需补面并写清 Σ_1 的方程与**方向** 3 分｜散度 2 分｜三重积分（球坐标）4 分｜补面通量为零的论证 2 分｜结论 1 分。

归因：① 补面取上侧——方向错了答案差两倍，这是本题最大的坑；② 球坐标把 φ 的范围写成 $[0,\pi]$，把下半球也算进去，结果翻倍；③ 散度算成 $2z^2+3z^2=5z^2$ 却抄成 $4z^2$ 之类；④ 直接对开曲面硬套高斯公式（写"由高斯公式得"，但曲面不闭合）。→ H12

第 21 题（12 分）

怎么想：这是"对角线全同、非对角全同"的矩阵，特征值一定长成 $\lambda_1=1+2a$（对应 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$）与 $\lambda_2=\lambda_3=1-a$。**先猜出来**，（Ⅰ）就是一句话的事，（Ⅱ）只需处理重根的正交化。

（Ⅰ） 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix},\qquad A(1,1,1)^{\mathrm{T}}=(1+2a)(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

且平面 $x_1+x_2+x_3=0$ 上每个向量都是 A 的特征向量，对应 $\lambda=1-a$（二重）。故

$$f\text{ 正定}\iff 1+2a>0\text{ 且 }1-a>0\iff -\frac{1}{2}<a<1.$$

（等价做法：顺序主子式 $1>0$、$1-a^2>0$、$(a-1)^2(2a+1)>0$，同解。）

（Ⅱ） $a=\dfrac{1}{2}$ 时 $\lambda_1=2$、$\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{1}{2}$。

- $\lambda_1=2$：$\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；
- $\lambda_{2,3}=\dfrac{1}{2}$：解 $\left(A-\dfrac{1}{2}E\right)\boldsymbol{x}=0$ 得 $x_1+x_2+x_3=0$。取 $\boldsymbol{u}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，再取与 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{u}_2$ 都正交的 $\boldsymbol{u}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{u}_3\perp\boldsymbol{u}_2$ 验算：$1-1+0=0$），单位化：

$$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

取正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y},$$

则

$$f=2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2.$$

（Ⅲ） $f=1$ 即

$$\frac{y_1^2}{1/2}+\frac{y_2^2}{2}+\frac{y_3^2}{2}=1,$$

三个半轴分别为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$，是**椭球面**（旋转椭球，短轴沿 $\boldsymbol{q}_1$ 方向）。

给分点：（Ⅰ）得出 $-\frac{1}{2}<a<1$ 3 分 | （Ⅱ）特征值与特征向量 3 分、重根正交化与单位化 3 分、标准形与 Q 2 分 | （Ⅲ）判断类型 1 分。

归因：① 重根的两个特征向量不正交就拼 Q —— $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 不是对角阵，整题作废；② 单位化漏做；③（Ⅰ）只验 $|A|>0$，没验二阶主子式（$a=1.1$ 时 $|A|>0$ 却不正定）；④（Ⅲ）只看系数大小不看符号，把单叶双曲面说成椭球面。→ L05 | L06

第 22 题（12 分）

怎么想：均匀分布的 MLE 是"似然函数单调、极值在约束边界"的经典例子，**不能求导**。这是本卷概率大题真正想考的一步。

（Ⅰ）矩估计：$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，令 $\dfrac{\theta}{2}=\bar{X}$ 得

$$\hat{\theta}_1=2\bar{X}.$$

（Ⅱ）最大似然：似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\theta^{-n}\quad(0<x_i<\theta,\ i=1,\dots,n),$$

否则 $L=0$。故 $\ln L=-n\ln\theta$ 在 $\theta>0$ 上**严格递减**，L 在 θ 取最小可能值时最大。约束是 $\theta\geqslant\max x_i$，于是

$$\hat{\theta}_2=X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}.$$

（Ⅲ）无偏性

$$E(\hat{\theta}_1)=2E(\bar{X})=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ **无偏**。

$X_{(n)}$ 的密度为 $f_{(n)}(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}$（$0<x<\theta$），故

$$E\big(X_{(n)}\big)=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta,$$

故 $\hat{\theta}_2$ **有偏**，无偏修正为

$$\tilde{\theta}=\frac{n+1}{n}X_{(n)}.$$

（Ⅳ）方差比较

$$D(\hat{\theta}_1)=4D(\bar{X})=4\cdot\frac{\theta^2}{12n}=\frac{\theta^2}{3n}.$$

又 $E\big(X_{(n)}^2\big)=\displaystyle\int_0^{\theta}x^2\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2$，故

$$D\big(X_{(n)}\big)=\frac{n}{n+2}\theta^2-\frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

$$D(\tilde{\theta})=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2\cdot\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

比较分母：$n(n+2)\geqslant 3n\iff n\geqslant 1$，故 $n\geqslant 2$ 时 $n(n+2)>3n$，即

$$D(\tilde{\theta})<D(\hat{\theta}_1),$$

修正后的最大似然估计比矩估计更有效。

给分点：（Ⅰ）2 分｜（Ⅱ）写出似然函数并指出"单调、极值在边界" 4 分｜（Ⅲ）两个无偏性判断各 2 分，共 4 分｜（Ⅳ）两个方差与比较结论 2 分。

归因：① 对 $\ln L = -n\ln\theta$ 求导令其为零，得 $-\frac{n}{\theta}=0$ 无解，然后卡死——**单调似然的极值在约束边界**；② 忘了支撑集 $0<x_i<\theta$ 这个约束，把 $\hat{\theta}$ 写成 $\bar{X}$ 或 $2\bar{X}$；③ 修正时乘反方向（$E(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta$ 偏小，要乘 $\frac{n+1}{n}$）；④ 比较方差时漏掉 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ 的平方，结论会反转。→ P05 ｜ P06

得分对照

分数段	说明	下一步
120 以上	转化能力已达标	只补冷门（欧拉方程、切比雪夫、置信区间）
100—119	会做但慢，多在第 20、21 题丢方向分	重做 20、21，掐表 15 分钟内
80—99	第一步转化常卡住	按 06 第五节的空缺清单补章
80 以下	基础流程不熟	回在读讲次，先把"换元—补面—正交化—求似然"四条流程手写一遍