数学一 · 第三次模拟试卷

> **卷面规格照 2021—2025 年真题**：选择题 10 题（每题 5 分，共 50 分）、填空题 6 题（每题 5 分，共 30 分）、解答题 6 题（17 题 10 分，18—22 题每题 12 分，共 70 分），满分 150 分。
>
> 科目配比照真题：高等数学 86 分、线性代数 32 分、概率论与数理统计 32 分。
>
> **难度**：比真题平均高约半档，也比前两卷再高半档。抬难度的方式只有两条——**多一步转化**（欧拉方程要先换元、高斯要先补面、二次型要先定参再正交化）、**多一层辨析**（抽象幂级数、反常积分两端、幂等矩阵的秩）。题量没加，时间却建议给到 200 分钟：这三处转化是硬耗时的。

怎么用这份卷子

1. **限时盲做**（200 分钟一次做完，不查书）。做不出来画圈，别停，也别在一道题上耗超过 15 分钟。
2. **对解析**（02a 客观题解析 ｜ 02b 解答题解析）。只问一句：卡在**想不到方法**，还是**想到了但算错**。这两类错，补法完全不同。
3. **查手册的坑**（高数 ｜ 线代 ｜ 概率）。只看"坑"那两行，定义你已经会了。

一、选择题（1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的（　）

（A）二阶无穷小

（B）四阶无穷小

（C）五阶无穷小

（D）三阶无穷小

2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则该幂级数在 $x=0$ 处（　）

（A）条件收敛

（B）绝对收敛

（C）发散

（D）敛散性不能确定

3. 设 p,q 为常数且 $q>0$，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则（　）

（A）$-1<p<q-1$

（B）$p<q-1$

（C）$-1<p<q$

（D）$p>-1$

4. 设函数 P, Q, R 在空间区域 Ω 内有连续偏导数，Σ 为 Ω 内的分片光滑曲面。则下列命题中正确的是（　）

(A) 若在 Ω 内处处有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 内与路径无关

(B) 若 $\displaystyle\iint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，则在 Σ 上恒有 $R \equiv 0$

(C) 若对 Ω 内任一闭曲线 L 都有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$，则 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 Ω 内是某二元函数的全微分

(D) 若 Σ 为闭曲面且取内侧，则 $\displaystyle\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathrm{d}V$

5. 设 A 为 3 阶矩阵，其特征值为 $1, -1, 2$，则 $|A^2 - 2A + 3E| =$ （　）

(A) 12

(B) 36

(C) -36

(D) 0

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵，则齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件是（　）

(A) $r(A) = r(B)$

(B) $AB = O$

(C) $r(A) = r(B) = n$

(D) 存在可逆矩阵 P 使 $A = PB$

7. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 = A$，则下列结论中一定成立的是（　）

(A) $r(A) + r(A - E) = n$

(B) $r(A) = r(A - E)$

(C) $r(A) + r(A - E) = 2n$

(D) $A = E$

8. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 2$，方差 $D(X) = 1$，则由切比雪夫不等式可得 $P\{-1 < X < 5\} \geqslant$（　）

(A) $\dfrac{1}{9}$

(B) $\dfrac{3}{4}$

(C) $\dfrac{8}{9}$

(D) $\dfrac{2}{3}$

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为：$P\{X=-1,Y=0\}=0.2$，$P\{X=-1,Y=1\}=0.4$，$P\{X=1,Y=0\}=0.3$，$P\{X=1,Y=1\}=0.1$，则（　）

(A) X 与 Y 不相关，且相互独立

(B) X 与 Y 相关，且不相互独立

(C) X 与 Y 不相关，但不相互独立

(D) X 与 Y 相关，且相互独立

10. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，σ^2 未知，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差。则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　）

(A) $\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(B) $\bar{X}\pm u_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(C) $\bar{X}\pm t_{\alpha/2}(n)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(D) $\bar{X}\pm t_{\alpha}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

二、填空题（11—16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=$ _____。

12. 设 $f(x)=x^2$　$(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的余弦级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ _____。

13. 曲面 $z=x^2+2y^2$ 上使切平面平行于平面 $2x+4y-z=0$ 的切平面方程为 _____。

14. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=$ _____。

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维列向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|=$ _____。

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，且 $P\{X>1\}=\mathrm{e}^{-2}$，则 $P\{X\leqslant 2\mid X>1\}=$ _____。

三、解答题（17—22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）

求欧拉方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$ （$x > 0$）满足 $y(1) = 1$、$y'(1) = 1$ 的特解。

18.（本题满分 12 分）

设 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 。

（Ⅰ）求 f 的极值;

（Ⅱ）求 f 在闭区域 $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 2\right\}$ 上的最大值与最小值。

19.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$。

（Ⅰ）证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f''(\eta)\leqslant -2$。

20.（本题满分 12 分）

设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，计算

$$I=\iint_{\Sigma} xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

21.（本题满分 12 分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a\big(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\big),$$

其中 a 为常数。

（Ⅰ）求 a 的取值范围，使 f 正定；

（Ⅱ）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，把 f 化为标准形，并写出正交矩阵 Q；

（Ⅲ）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，判断二次曲面 $f=1$ 的类型。

22.（本题满分 12 分）

设总体 X 在 $(0,\theta)$ 上服从均匀分布，$\theta>0$ 未知，$X_1,\ldots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本。

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

（Ⅲ）判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是否无偏，若有偏则给出无偏修正；

（Ⅳ）在无偏估计中比较 $\hat{\theta}_1$ 与修正后的 $\hat{\theta}_2$ 的方差（$n\geqslant 2$）。