第3讲 · 向量：表示、冗余和坐标

这一讲容易混，是因为“向量、系数、坐标”都写成一列数。先分清：向量是我们要表示的对象；系数是组合它时各用多少；选定一组基后，这些唯一确定的系数才叫坐标。

默认实列向量。$L(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ 或 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$ 都表示这些向量的全部线性组合组成的集合。

1. 线性表示：给定材料，能不能拼出目标

取 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$、$\alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，问 $\beta=(2,3,5)^{\mathrm{T}}$ 能否由它们表示。

“表示”就是寻找两个数 x_1,x_2，使

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta.$$

按分量写开：

$$\begin{cases} x_1=2,\\ x_2=3,\\ x_1+x_2=5. \end{cases}$$

三式相容，故 $\beta=2\alpha_1+3\alpha_2$。若把目标改成 $(2,3,6)^{\mathrm{T}}$，前两式仍强制 $x_1=2,x_2=3$，第三式却要求 $5=6$，所以无法表示。

把材料按列拼成 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$，上面就是 $Ax=\beta$。因此

$$\beta\text{ 可由原组表示}\iff Ax=\beta\text{ 有解}\iff r(A)=r(A,\beta).$$

最后一条为什么合理？加上 β 后秩不变，说明它没有提供新方向；若秩增加，说明它在原有材料张成的空间之外。

若材料共有 s 个，表示法唯一还要 $r(A)=s$。**是否能表示**取决于目标；**表示法是否唯一**取决于材料中有没有冗余。

2. 线性相关：能不能用不全为零的系数组合出零

总能用全零系数组合出零，那没有信息。线性相关要求存在不全为零的 c_i，使

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=0.$$

例如再添 $\alpha_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，有

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0.$$

这说明第三个向量没有增加方向。因此 β 既可以表示成 $2\alpha_1+3\alpha_2$，也可以表示成 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$。

一般地，若 $Ax=\beta$ 有一个解 x_0，且 $Ac=0$ 有非零解，那么 x_0+tc 也都是表示系数：

$$A(x_0+tc)=\beta+t0=\beta.$$

这就是“相关导致表示不唯一”的原因。反之，若两种系数 x, y 表示同一个目标，则 $A(x-y)=0$；材料无关时，只能 $x=y$。

设 A 有 s 列：

$$\text{无关} \iff Ax=0 \text{ 只有零解} \iff r(A)=s,$$

$$\text{相关} \iff Ax=0 \text{ 有非零解} \iff r(A)<s.$$

秩与向量个数比较，不是与维数随便比较。 只有 $s=n$、矩阵为方阵时，才能用 $|A|$ 判无关。

2.1 几条结论从定义推出

- 含零向量必相关：给零向量系数 1，其余为 0。
- 整体无关，则其中任意部分无关；部分相关，则补上系数 0 后整体仍相关。
- n 维空间里超过 n 个向量必相关，因为秩不超过 n。
- 相关只保证至少有一个向量能被其余表示，不保证每个都能。例如 $e_1, e_2, 2e_2$ 中 e_1 不能由后两个表示。
- 无关组统一增加分量后仍无关：若长向量有相关关系，截回原分量就与原组无关矛盾。相关组统一删去分量后仍相关，因为原有关系仍成立。

2.2 抽象向量组为什么能只算系数矩阵

若原组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 无关，记 $A=(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$，新组为 $B=AC$，则

$$By=0 \iff A(Cy)=0 \iff Cy=0.$$

第二步用到原组无关。所以 $r(B)=r(C)$。特别地，C 是 s 阶方阵时，新组无关等价于 $|C|\neq 0$。**若原组不无关，不能直接把新组的秩写成 $r(C)$。**

3. 秩与极大无关组：留下一套够用且无冗余的材料

极大无关组是原组的一个子组，满足：自己无关；原组里再添任何一个其余向量都会相关。它能表示原组所有向量。所有极大无关组的向量个数相同，这个个数就是原组的秩。

例：

$$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=2\alpha_1,\quad \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_3.$$

按列拼接，再作行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

两行非零，秩为 2。主元（每行第一个非零元素）在第 1、3 列，故取**原矩阵**的 α_1, α_3 为极大无关组。

为什么行变换后列关系还在？行变换等于左乘可逆矩阵 P，而 $Ac=0 \iff PAc=0$。所以表示系数没有变化。可以在化简后的矩阵求列之间的关系，再回到原向量写答案。

列变换会重组材料本身。用主元列选原向量的这个算法要用行变换，不应混用列变换。

4. 向量组等价：能生成的目标完全相同

两个向量组等价，意思是能够互相表示，即张成同一个空间。向量个数可以不同。

若 $B = AC$，说明 B 的每列都由 A 的列组合而成，故 $r(B) \le r(A)$。若还能反向表示，就有相反的不等式，因此等价组同秩。

但同秩未必等价：$\{(1,0)^{\mathrm{T}}\}$ 和 $\{(0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 秩都为 1，却生成不同的直线。

判据是

$$A \text{ 的列组与 } B \text{ 的列组等价} \iff r(A) = r(B) = r(A,B).$$

这里是**左右拼接**：问把两组材料放到一起，会不会多出新方向。如果已知一组能表示另一组，再加同秩，就足以判等价。

不要和矩阵等价混淆。 同型矩阵等价只要求同秩；列向量组等价还要求张成空间相同。上面的两列矩阵作为矩阵等价，作为向量组却不等价。

5. 基与坐标：给表示系数一个固定的名字

一个子空间 V 是对加法和数乘封闭的非空集合。它必须含零向量。比如过原点的平面是子空间，不过原点的平面不是。

能表示 V 中所有向量、且本身无关的一组向量，叫 V 的一组基。基的向量个数叫维数。选定基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 后，每个 $v \in V$ 都有唯一表示

$$v = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r.$$

$x = (x_1, \dots, x_r)^{\mathrm{T}}$ 是 v 在这组基下的坐标。它与 v 的标准分量一般不同。

5.1 过渡矩阵不要靠口诀猜方向

约定旧基矩阵为 U、新基矩阵为 V，并写

$$V = UC.$$

C 的第 j 列是新基第 j 个向量在旧基下的坐标，称从旧基到新基的过渡矩阵。它必可逆。

同一个向量 v，两种坐标满足

$$v = Ux_{\text{old}} = Vx_{\text{new}} = UCx_{\text{new}}.$$

由旧基无关，表示系数唯一，故

$$x_{\text{old}} = Cx_{\text{new}}, \qquad x_{\text{new}} = C^{-1}x_{\text{old}}.$$

例如旧基是标准基，新基为 $(1,0)^{\mathrm{T}}, (1,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

标准分量 $v = (3,2)^{\mathrm{T}}$ 满足 $x_1 + x_2 = 3, x_2 = 2$，所以新坐标为 $(1,2)^{\mathrm{T}}$。检查 $1(1,0) + 2(1,1) = (3,2)$ 即可。

6. 内积与施密特：逐次减掉已经有的方向

实向量的内积与长度：

$$\langle u, v \rangle = u^{\mathrm{T}} v = \sum_i u_i v_i, \qquad \|u\| = \sqrt{u^{\mathrm{T}} u}.$$

非零向量夹角满足 $\cos\theta = \langle u, v \rangle / (\|u\|\|v\|)$。内积为零叫正交。非零且两两正交的一组向量必无关：对 $\sum c_i u_i = 0$ 与 u_j 作内积，得到 $c_j \|u_j\|^2 = 0$，故每个 $c_j = 0$。

常用估计是 $|\langle u, v \rangle| \le \|u\|\|v\|$、$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$。

6.1 投影系数为什么是内积除以长度平方

想从 v 中减去 u 方向的部分，设 $w = v - cu$。要求 $w \perp u$，则

$$0 = \langle v - cu, u \rangle = \langle v, u \rangle - c\langle u, u \rangle.$$

因此 $c = \langle v, u \rangle / \langle u, u \rangle$。分母是长度平方，因为方程里出现的是 $\langle u, u \rangle$。

6.2 完整的两向量例子

取 $\alpha_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$。先保留第一个方向：$u_1 = \alpha_1$。再减投影：

$$u_2 = \alpha_2 - \frac{1}{2} u_1 = (1/2, -1/2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

自检 $\langle u_1, u_2 \rangle = 1/2 - 1/2 = 0$。单位化得到

$$e_1 = \frac{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{(1,-1,2)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{6}}.$$

如果还有 α_3，要减去它在**前面每一个正交方向**上的投影：

$$u_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle \alpha_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2.$$

先单位化再处理后面的向量也合法，只要公式始终使用当前的正交向量；若前面已经是单位向量，分母就为 1。重要的是不混用两套数值。

给定输入组无关时，每步得到的 u_i 都非零。若出现零向量，说明原输入有冗余，不能继续除以它的长度。

7. 和空间与交空间：能共同生成什么

设 $V_1 = L(A)$、$V_2 = L(B)$，这里 $L(A)$ 指 A 的列张成的空间。

和空间由两组材料合在一起生成：

$$V_1 + V_2 = L(A, B), \qquad \dim(V_1 + V_2) = r(A, B).$$

交空间的向量要同时由两组表示，即 $w = Ax = By$。因此先解

$$(A, -B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

再把系数解代回 $w = Ax$。注意：系数解可能非零，但对应 $w = 0$，也可能几个解映成同一个方向。最后必须删掉零向量和冗余向量，不能把系数解直接当成交空间的基。

例如 $V_1 = L(e_1, e_2)$、$V_2 = L(e_2, e_3)$，共同向量只能是 $(0, t, 0)^{\mathrm{T}}$，故交空间基为 e_2。和空间是整个 $\mathbb{R}^3$。维数满足

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

8. 练习安排与参考

先掌握的动作	题号
把表示、相关翻译成方程	1、3、7、8、12
选原向量的极大无关组	2、14
用互相表示判等价	6、10
内积、减投影	4、5、9
基与坐标变换	11、13
证明与交空间	15—18

参考 `参考仓库/Math/linear-algebra/knowledge/3-vector/vector.tex` 与 `exercise/3-vector/vector.tex`，重组了表示、相关、极大无关组、等价、基与坐标的关系，补充施密特与交空间的逐步解释。题型锚点保留在 02-试题，不照搬真题原题。