第2讲 · 矩阵 · 试题

建议拆三次完成：1—6 题约 25 分钟，7—14 题约 50 分钟，15—18 题约 35 分钟。第一次允许翻手册，但先自己写出第一步，再看解析。默认实矩阵，E 的阶数由题意确定。

题目按参考仓库矩阵章节的运算、初等变换、求逆、矩阵幂、伴随、秩等题型另设数据。题型锚点仅提示对应知识块，不复刻真题原题。

A 组 · 基础计算

1. 【乘法与大小】设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

先写 AB, BA 的大小，再算两个乘积。能否因 AB 和 BA 不相同而说本题中“两个同型矩阵不相等”？

2. 【乘法与转置】设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

求 $AB, BA, (AB)^{\mathrm{T}}$，验证 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$；比较 $(A+B)^2$ 与 $A^2+2AB+B^2$。

3. 【具体求逆】用初等行变换求 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，并乘回检查。

4. 【秩】将下列矩阵化为行阶梯形，求秩并指出主元列号：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

5. 【伴随与行列式】设 $A=\mathrm{diag}(2,3,4)$。求 $|A|, A^{-1}, A^{*}$ 以及 $|2A|$，验证 $AA^{*}=|A|E$。

6. 【初等矩阵，锚点：2020·5】设 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$。计算 PA, AP, P^{-1}，分别用文字说明 PA 与 AP 对 A 做了什么。

B 组 · 综合应用

7.【抽象求逆，锚点：2017·5、2022·5】n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A-3E=O$。证明 A 与 $A-E$ 都可逆，并求各自的逆。证明中不要预先使用尚未证明存在的逆矩阵。

8. 【恒等变形，锚点：2022·15】同阶方阵 A, B 满足 $AB = 2A + B$。证明 $A - E$ 与 $B - 2E$ 均可逆，求 $(A - E)^{-1}$。

9. 【含参秩】设

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & t & 2\\ 1 & 2 & t\end{pmatrix}.$$

求所有实数 t 对应的秩，并说明何时可逆。每个特殊参数值都要代回检查。

10. 【伴随的秩】A 是四阶矩阵。分别在 $r(A)=4,3,2$ 时，求 $r(A^*)$。在 $r(A)=3$ 时，说明为什么 A^* 非零，却不可能有两列线性无关。

11. 【秩1矩阵幂，锚点：2016·21】设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$。

（Ⅰ）写成 uv^{T}，求 A^k（正整数 k）；

（Ⅱ）证明 $E+A$ 可逆并求逆，先尝试设为 $E+cA$。

12. 【幂零与二项式，锚点：矩阵幂题型】设

$$N=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A=E+N.$$

求 N^2, N^3, A^k（整数 $k\ge 2$）和 A^{-1}。写出 A^k 的各个元素。

13. 【分块秩，锚点：2018·6、2021·7、2023·5】设 A 为 n 阶矩阵，$r(A)=r$，求

$$r\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \qquad r\begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}.$$

写出分块变换或等价说明。

14. 【分块消元】设 $A^2=A$、A 为 n 阶矩阵，$r(A)=r$。求

$$r\begin{pmatrix} A & E \\ O & A \end{pmatrix}.$$

提示：先交换两块列，把单位阵放到左上角。

C 组 · 完整过程与证明

15. 【矩阵方程】设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&9\\2&6\end{pmatrix}.$$

求 $AXB=C$ 的解，说明左右乘逆的顺序，并把结果代回验证。

16. 【秩的上下界，锚点：2025·7 所属知识块】若 $A^2 = A$，证明 $r(A) + r(E - A) = n$。要求分别写出上界与下界。

17. 【迁移证明】若 $A^2 = E$，证明 $r(A+E) + r(A-E) = n$。说明这与第 16 题使用了哪两个相同的步骤。

18. 【分块秩恒等式】对任意两个 n 阶矩阵 A, B，证明

$$r\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix} = n + r(BA).$$

要求写出两步分块消元，并说明没有假设 A, B 可逆。

做完打开 03-解析。若卡在第一步，先回手册第 9 节查入口。