第2讲 · 矩阵 · 解析

每题先交代入口，再展开计算。对错之外，还要检查自己是否写清了适用条件。

A 组 · 基础计算

第 1 题

AB 为 2×2，BA 为 3×3。以 AB 左上角为例，计算是 $1\times 1+0\times 0+2\times 3=7$，故

$$AB=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

两个乘积不同型，因此不能称“两个同型矩阵不相等”。它们说明即使两种顺序都能乘，结果的大小也可能不同。

第 2 题

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$A^2=B^2=O$，且 $B^{\mathrm T}=A, A^{\mathrm T}=B$，所以

$$(AB)^{\mathrm T}=AB=B^{\mathrm T}A^{\mathrm T}.$$

而 $A+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，平方为 E；$A^2+2AB+B^2=\operatorname{diag}(2,0)$。中间项实际应为 $AB+BA=E$，不能合并。

第 3 题

从横排增广矩阵开始，先作 $R_2\leftarrow R_2-\frac{3}{2}R_1$：

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1\end{array}\right).$$

再 $R_2\leftarrow 2R_2$，$R_1\leftarrow R_1-R_2$，最后 $R_1\leftarrow R_1/2$，得

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right).$$

因此 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$。验算乘积的四个元素为 $4-3=1, -2+2=0, 6-6=0, -3+4=1$。

第 4 题

先 R_2-2R_1, R_3-3R_1，再 R_3-R_2：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

秩为 2，主元在第 1、3 列。非零列有三列，并不表示秩为 3；第二列与第一列重复了方向。

第 5 题

对角矩阵的行列式是对角元素之积，逆是各自取倒数：

$$|A| = 24, \quad A^{-1} = \operatorname{diag}(1/2, 1/3, 1/4).$$

因此 $A^{*} = 24A^{-1} = \operatorname{diag}(12, 8, 6)$，乘回去每个对角元素都是 24。$|2A| = 2^{3}|A| = 192$，这里整体乘 2 相当于三行各乘 2。

第 6 题

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a + c & 3b + d \end{pmatrix}, \quad AP = \begin{pmatrix} a + 3b & b \\ c + 3d & d \end{pmatrix}.$$

前者为第 2 行加第 1 行的 3 倍；后者为第 1 列加第 2 列的 3 倍。撤销操作要把 3 改成 -3，所以 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$。

B 组 • 综合应用

第 7 题

先从关系里孤立单位阵：

$$A^{2} - 2A = 3E \Rightarrow A\frac{A - 2E}{3} = E.$$

同阶方阵一侧乘积为单位阵就足够，故 $A^{-1} = (A - 2E)/3$。

再观察 $(A - E)^{2} = A^{2} - 2A + E = 4E$，所以

$$(A - E)\frac{A - E}{4} = E, \qquad (A - E)^{-1} = \frac{A - E}{4}.$$

两个逆都是从乘积检验得到的，不存在先假设可逆的循环。

第 8 题

目标含 $A - E$，就尝试展开 $(A - E)(B - 2E)$：

$$(A - E)(B - 2E) = AB - 2A - B + 2E = 2E.$$

所以 $(A - E)^{-1} = (B - 2E)/2$，同时 $(B - 2E)^{-1} = (A - E)/2$。不用交换 A, B，也不用先假设它们本身可逆。

第 9 题

先从第 2、3 行各减第 1 行：

$$A(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{pmatrix}.$$

行列式为 $(t-1)^2 - 1 = t(t-2)$。所以 $t \neq 0, 2$ 时秩为 3，可逆。

$t = 0$ 时，下两行是 $(0,-1,1), (0,1,-1)$，互为相反数，且与首行无关，秩为 2。$t = 2$ 时下两行相同，也与首行无关，秩为 2。**行列式为零只能先说秩小于 3，仍需证明不是 1。**

第 10 题

答案依次为 $4, 1, 0$。

$r(A) = 3$ 时存在非零三阶子式，所以至少一个代数余子式非零，即 $A^* \neq O$。又 $|A| = 0$，由 $AA^* = O$ 和零乘积的秩不等式，

$$3 + r(A^*) \leq 4.$$

因此非零的 A^* 只能秩为 1，不可能有两列无关。$r(A) = 2$ 时所有三阶子式为零，故 $A^* = O$。

第 11 题

取 $u = v = (1, 2)^{\mathrm{T}}$，则 $A = uv^{\mathrm{T}}$，且 $v^{\mathrm{T}}u = 5$。因此

$$A^2 = 5A, \qquad A^k = 5^{k-1}A \quad (k \geq 1).$$

求逆时设候选 $E + cA$，乘出

$$(E + A)(E + cA) = E + (1 + c)A + cA^2 = E + (1 + 6c)A.$$

取 $c = -1/6$，便得到单位阵。因此 $(E + A)^{-1} = E - A/6$。这是先验证再确认逆存在。

第 12 题

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = O.$$

E 与 N 可交换，二项式中三次以上项为零，所以

$$A^k = E + kN + \binom{k}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k(k-1) \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又 $(E + N)(E - N + N^2) = E + N^3 = E$，故

$$A^{-1} = E - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 13 题

第一个矩阵先下块行减上块行，再右块列减左块列，变为 $\mathrm{diag}(A, O)$，所以秩为 r。

第二个交换两块行，变为 $\mathrm{diag}(A, A)$，所以秩为 $2r$。交换块行可以拆成有限次普通行交换，秩不变。

第 14 题

上三角分块不能直接把对角秩相加。按提示交换两块列：

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E & A \\ A & O \end{pmatrix}.$$

下块行减去 A 乘上块行，再右块列减去左块列乘 A：

$$\begin{pmatrix} E & A \\ A & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E & A \\ O & -A^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E & O \\ O & -A^2 \end{pmatrix}.$$

所以秩为 $n + r(A^2) = n + r$。关键是 $A^2 = A$，不是 A 可逆。

C 组 · 完整过程与证明

第 15 题

A, B 的行列式分别为 1、6，均可逆。左乘 A^{-1}、右乘 B^{-1}：

$$X = A^{-1}CB^{-1}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \operatorname{diag}(1/2, 1/3).$$

先算 $A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$。右乘对角矩阵相当于每列分别缩放，故

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

验算 $AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，再右乘 B 得 $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = C$。

第 16 题

上界来自 $A(E - A) = A - A^2 = O$：

$$r(A) + r(E - A) \le n.$$

下界来自 $A + (E - A) = E$：

$$n = r(E) \le r(A) + r(E - A).$$

上下界合在一起，得到和为 n。不能只写出其中一个不等式就宣布等号成立。

第 17 题

零乘积给上界：$(A + E)(A - E) = A^2 - E = O$，故秩和不超过 n。

可逆的差给下界：$(A + E) - (A - E) = 2E$，故

$$n = r(2E) \le r(A + E) + r(A - E).$$

因此秩和为 n。与上一题相同的两个步骤是“乘积为零”和“和或差可逆”。

第 18 题

从左上角的单位阵开始消：

$$\begin{pmatrix} E & A \\ B & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E & A \\ O & -BA \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E & O \\ O & -BA \end{pmatrix}.$$

第一步下块行减去 B 乘上块行，第二步右块列减去左块列乘 A。对应左乘 $\begin{pmatrix} E & O \\ -B & E \end{pmatrix}$、右乘 $\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}$，两者无论 A, B 是否可逆都可逆（撤销时把负号改正号）。故秩不变，结果为 $n + r(BA)$。

复盘时看过程

1—6 题卡住，先补大小、乘法和行变换；7—12 题卡住，先找可以乘出单位阵或降低幂次的关系；13—18 题卡住，把每次分块变换实际乘一遍。不要把“还没找到第一步”误当成“公式记得不够多”。