第4讲 · 线性方程组 · 解析

题号沿用原练习。第 10 题第二问已补充“两两法向量不成比例”；第 16 题第二问的相容常数已改为 4。请使用同步更新的试题。

A 组 · 基础

第 1 题

入口： 指定用克拉默法则，先求系数行列式，确认分母非零。

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=(-1)-(-3)+5=7.$$

分别把第 1、2、3 列换成常数列：

$$D_1=\begin{vmatrix}6&1&1\\3&-1&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&3&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=14,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&-1&3\\1&2&2\end{vmatrix}=21.$$

因此 $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)$。代回三个左端分别为 $6,3,2$，与常数项一致。

第 2 题

第二行减第一行，再第一行减新的第二行：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{pmatrix}.$$

读成方程 $x_1=x_3+2x_4,x_2=-2x_3-3x_4$。令 $x_3=s,x_4=t$，得

$$x=s(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+t(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

两个固定向量构成一个基础解系：它们都是解，且第 3、4 分量分别为 $(1,0),(0,1)$，保证无关。秩为 2，基础解系含 $4-2=2$ 个向量，也与结果相符。

第 3 题

第二式减第一式，得到 $-2x_2+x_3=-1$，所以 $x_2=(1+x_3)/2$。代回第一式：$x_1=(5-3x_3)/2$。

令 $x_3=t$，通解为

$$x=(5/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}+t(-3/2,1/2,1)^{\mathrm{T}}.$$

第一个向量代入原式得到 $(3,2)$，第二个代入齐次左端得到 $(0,0)$，因此全部参数值都是解。一个自由未知量给出全部解，没有漏解。

也可以写成 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}+s(-3,1,2)^{\mathrm{T}}$，两种写法表示同一条直线。

第 4 题

答案 **C**，因为 $A(\eta_1+\xi)=b+0=b$。其余三项左乘 A 后分别得到 $2b,0,2b$；由于 $b\neq 0$，都不等于 b。

不要只凭“都是解向量的组合”判断，实际乘一次 A 最直接。

第 5 题

未知量个数是列数 $n=5$，不是行数 4。齐次解空间维数为 $5-3=2$，所以基础解系含 2 个向量。有解的非齐次通解也含 2 个独立参数。

不可能唯一解，因为唯一解要求系数矩阵列满秩 $r(A)=5$，但本题只有 3。

第 6 题

第三式恰好是前两式相加，因此没有增加约束。前两式相减得 $2y=0$，再得 $x+z=1$。

令 $z=t$，公共交集是

$$(x,y,z)=(1-t,0,t),$$

即一条直线。两个有效约束给 $r(A)=r(A,b)=2$，也可由秩判定。

B 组 • 中等

第 7 题

第三行等于第一行加第二行，故冗余。前两行无关，所以秩为 2。

由第二式 $x_3=-x_2$，第一式 $x_1=-x_2-x_4$。令 $x_2=s,x_4=t$：

$$x=s(-1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}+t(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

这两个固定向量就是一个基础解系。看自由分量 x_2,x_4 即可证明它们无关，个数也等于 $4-2=2$。

第 8 题

入口： 先求简单方程组的全部解，再要求另一组保留这个方向。

$Ax=0$ 中第二式减第一式得到 $x_2+2x_3=0$，因此

$$x=t(1,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

代入 B 的第二行：$t(a-6+5)=t(a-1)$。要对所有 t 成立，必须 $a=1$。代回后 B 两行无关，所以解空间也是一维；它包含上述整条直线，故恰为同一解集。

对 C 同样代入，得到 $t(2-6+b)=t(b-4)$，故必须 $b=4$。代回后两行也无关，所以充分性同样成立。

答案：$a=1$，$b=4$。只代入得到必要条件后，还要检查没有让另一组秩降低、额外增加解。

第 9 题

行列式为

$$|A| = -(a-1)^2(a+2).$$

因此 $a \neq 1, -2$ 时唯一解。此时每行系数和为 $a+2$，可以直接验证唯一解为

$$x = \frac{1}{a+2}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$a = 1$ 时三个方程全是 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$，秩为 1，有无穷多解：

$$x = (1,0,0)^{\mathrm{T}} + s(-1,1,0)^{\mathrm{T}} + t(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

$a = -2$ 时三个左端相加恒为 0，右端相加为 3，矛盾，故无解。此时系数秩为 2（例如左上二阶子式为 -3），增广秩为 3。

这三个参数范围覆盖所有实数。

第 10 题

第一问答案 **B**。三个未知量，两个有效约束，无矛盾，故有一维公共交集，即一条直线。

第二问答案 **C**，需要使用补上的条件：任意两法向量不成比例，因此任意两平面都相交；增广秩大于系数秩说明三者没有公共点。

如果删去“两两法向量不成比例”，仅凭 $r(A) = 2, r(A,b) = 3$ 无法选 C。例如 $x = 0, x = 1, y = 0$ 满足同样的秩条件，前两平面却平行。这是原题条件不足的地方。

第 11 题

系数秩为 1，未知量有 3 个，所以齐次解空间维数为 2。取 η_1 作特解，构造两个差：

$$\xi_1 = \eta_2 - \eta_1 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2 = \eta_3 - \eta_1 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

它们都是齐次解。若 $c\xi_1 + d\xi_2 = 0$，第 1 分量给 $c = 0$，第 3 分量给 $d = 0$，故无关。维数为 2 的空间中有两个无关解，便构成基础解系。

通解为

$$x = (1,1,1)^{\mathrm{T}} + s(1,-1,0)^{\mathrm{T}} + t(0,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

第 12 题

先解 $Ax = 0$。两式相加、相减，分别得到 $x_1 = -x_3, x_2 = -x_4$。令 $x_3 = s, x_4 = t$，代入 $Bx = 0$ 即 $x_1 + x_2 = 0$，得到 $-s - t = 0$，所以 $t = -s$。

全部公共解为

$$x = s(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

代入原三个约束都为零。也可以把 A, B 上下拼接后一次消元，两种方法都正确。

第 13 题

齐次解空间维数为 $4-3=1$，只需要一个非零齐次方向。题目给的是两个解之和，先除以 2：

$$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

这个平均值仍是非齐次解，与 η_1 相减得非零齐次解 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$。于是

$$x=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+t(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

若直接用 $\eta_2+\eta_3$，左乘 A 得到的是 $2b$，不能把它当特解。

第 14 题

第一问按列拆。A 的两列都在 $(1,2)^{\mathrm{T}}$ 方向，而 B 的第一列 $(1,3)^{\mathrm{T}}$ 不在这个方向，因此对应的第一列方程已经无解，整体 $AX=B$ 无解。

行变换核验：

$$[A\mid B]=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&1\\2&4&3&2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&1\\0&0&1&0\end{array}\right).$$

第二问右端改为 $B_0=(1,2)^{\mathrm{T}}$，两行表示同一约束 $x_1+2x_2=1$。令 $x_2=t$，得到

$$X=(1,0)^{\mathrm{T}}+t(-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

注意右端从两列改为一列，未知矩阵的大小也从 2×2 改为 2×1。

C 组 • 证明与结构

第 15 题

令 $c=k_1+\cdots+k_s$，由线性性

$$A\Big(\sum_{i=1}^{s}k_i\eta_i\Big)=\sum_{i=1}^{s}k_ib=cb.$$

若系数和为 1，上式为 b，得到充分性。若这个组合是非齐次解，就有 $cb=b$，即 $(c-1)b=0$。由于 $b\neq 0$，至少一个分量非零，所以 $c-1=0$，得到必要性。

这也解释了为什么不能漏掉题设 $b\neq 0$：若 $b=0$，任意系数和都可以。

第 16 题

先对增广矩阵消元，第二、三行各减第一行：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&2\\1&4&a&b\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&3&a-1&b-1\end{array}\right).$$

再第三行减第二行的 3 倍：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-7 & b-4 \end{array}\right).$$

$a \neq 7$ 时三个主元，交于一点。$a = 7$ 时系数秩为 2；无公共点还要求 $b \neq 4$，这时最后一行矛盾。

三个法向量的第一分量都是 1，若成比例就必须相等；但它们的第二分量分别为 1、2、4，故任意两者都不成比例。因此这题可以进一步判定两两相交。

第一问答案为 $a = 7, b \neq 4$。第二问（已更正为 $a = 7, b = 4$）无矛盾，公共交线可令 $z = t$，得

$$(x, y, z) = (t, 1 - 2t, t) = (0, 1, 0) + t(1, -2, 1).$$

旧稿把最后常数 $b - 4$ 错读成了 $b - 3$。若沿用旧题的 $b = 3$，结论应是两两相交却没有公共点。

第 17 题

记两个解空间为 S_A, S_B，公共解空间为 $S = S_A \cap S_B$。上下拼接的方程恰好要求两组都满足，所以它的解空间就是 S。

若同解，则 $S_A = S_B = S$。三者未知量个数均为 n，由维数等于 n 减秩，得到三种秩相同。

反过来，若三种秩都等于 r，则 $\dim S_A = \dim S_B = \dim S = n - r$。又 $S \subseteq S_A$，有限维子空间包含且维数相同，只能 $S = S_A$；同理 $S = S_B$，故同解。

这证明需要“交集包含在各自空间里”这一条件，不能仅从维数相同就说空间相同。

第 18 题

令 $d = n - r$。为证无关，假设

$$c_0\eta_0 + \sum_{i=1}^{d} c_i(\eta_0 + \xi_i) = 0.$$

合并同类项：

$$\Big(c_0 + \sum_{i=1}^{d} c_i\Big)\eta_0 + \sum_{i=1}^{d} c_i\xi_i = 0.$$

左乘 A，利用 $A\eta_0 = b, A\xi_i = 0$，得到 $(c_0 + \sum c_i)b = 0$。由于 $b \neq 0$，有 $c_0 + \sum c_i = 0$。

代回原等式，剩下 $\sum c_i\xi_i = 0$。基础解系无关，所以 $c_1 = \cdots = c_d = 0$；再由系数和为零得到 $c_0 = 0$。因此所列向量无关。

若 $d = 0$，结论为单个非零特解 η_0 无关，也成立，因为 $A\eta_0 = b \neq 0$。

复盘建议

先检查自己是否把列数当成未知量个数，是否在出现矛盾时及时停止，是否检查基础解系无关。几何题另查“两两相交”的前提；参数题另查每次除法是否排除了分母为零。