第4讲 · 线性方程组：从消元读出全部解

这一讲始终围绕一个动作：**对增广矩阵作行变换，把方程变得容易读。** 秩、自由未知量、基础解系，都是对消元结果的描述。

默认实数范围。A 为 $m \times n$ 系数矩阵，n 始终是未知量个数，b 是 m 维常数列。写作 $Ax = b$，增广矩阵记作 $[A \mid b]$。

1. 消元为什么不会改变解

以

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

为例，第二式减第一式得到 $y + 2z = 2$。保留第一式时，新旧方程组能互相推回，所以解集相同。交换方程、方程乘非零数、一个方程加另一个的倍数，都可撤销，因此都保持解集。

矩阵操作是

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

现在可以直接读出

$$x - z = 1, \quad y + 2z = 2.$$

令 $z = t$，得到全部解 $(x, y, z) = (1 + t, 2 - 2t, t)$。因为 z 可以自由选择，叫自由未知量；x, y 随它确定，叫主元未知量。

列变换会改变未知量的对应关系。直接求原方程通解时使用行变换，常数列也必须跟着变。

2. 有解、唯一解、无穷多解怎样看出来

消元后可能出现两种“全零系数行”：

- $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$：重复信息，可以删去。
- $0x_1 + \cdots + 0x_n = c$ 且 $c \neq 0$：矛盾，无解。

如果没有矛盾行，设系数块有 r 个主元，就有 r 个主元未知量和 $n - r$ 个自由未知量。

消元结果	秩语言	结论
有矛盾行	$r(A) < r(A, b)$	无解
无矛盾行，每列都有主元	$r(A) = r(A, b) = n$	唯一解
无矛盾行，还有自由列	$r(A) = r(A, b) = r < n$	无穷多解，$n - r$ 个独立参数

在上一节例子中 $n=3, r=2$，所以剩 1 个自由参数。原来有多少行不等于有多少个有效约束：重复方程并不增加主元。

若 $m<n$，齐次方程一定有非零解；非齐次方程仍可能无解，只有**已知有解**后才能说有无穷多解。

3. 齐次方程：基础解系到底是什么

齐次就是 $b=0$。零向量永远是解，所以只讨论“只有零解”还是“还有非零解”。判据分别为 $r(A)=n$ 和 $r(A)<n$。

3.1 用一个四元例子理解基础解系

假设消元后是

$$\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0, \\ x_2-x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

第 1、2 列有主元，第 3、4 列是自由列。令 $x_3=s, x_4=t$，那么

$$x_1=-2s+t, \qquad x_2=s-3t.$$

把四个分量按未知量原顺序装回一列：

$$x=\begin{pmatrix} -2s+t \\ s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

两个固定向量记作 ξ_1,ξ_2。它们本身都是解，且无关：若 $c_1\xi_1+c_2\xi_2=0$，看第 3、4 分量就知道 $c_1=c_2=0$。又因为每个解都写成了它们的组合，所以它们构成一个基础解系。

基础解系就是一套能生成全部齐次解、又没有冗余的解向量。 不是任意找几个非零解就行。

3.2 为什么个数是 $n-r(A)$

每个自由未知量对应一个独立参数。让这些参数依次取 $(1,0,\dots),(0,1,\dots),\dots$，就得到一组基础解系，所以个数为 $n-r(A)$。

全体齐次解对加法和数乘封闭，因此构成解空间，其维数也是 $n-r(A)$。若只有零解，维数为 0，基础解系为空；不能把零向量作为基。

求解只化到行阶梯形再回代也完全正确。行最简形（主元为 1，主元列其他位置全为 0）便于直接读式子，是方便的选项，不是必须条件。

4. 非齐次通解：一个出发点，加上所有可走的方向

回到第 1 节：

$$x=\begin{pmatrix}1+t\\2-2t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

前一个向量是 $Ax=b$ 的一个特解 η；后一个向量是 $Ax=0$ 的基础解系中的向量。

为什么所有解恰好都能这样写？ 若 x 和 η 都满足非齐次方程，则

$$A(x-\eta)=Ax-A\eta=b-b=0.$$

因此任意解减去特解后，一定是齐次解。反过来，若 $A\xi=0$，则 $A(\eta+\xi)=b$。两个方向合起来得到

$$x=\eta+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

特解不是唯一的。换一个特解只是换出发点，整个解集不变。若 $b\neq 0$，解集不过原点，是齐次解空间的一次平移；它本身不叫向量空间。

4.1 已知几个解，怎样构造通解

若 η_i 都满足 $A\eta_i=b$，则

$$A\Big(\sum c_i\eta_i\Big)=\Big(\sum c_i\Big)b.$$

$b\neq 0$ 时，系数和为 1 恰好得到非齐次解；系数和为 0 恰好得到齐次解。例如两解之差是齐次解，两解平均值是非齐次解。

已知 $n-r=d$ 时，找出 d 个**无关**的解之差，再加一个特解，就能写通解。只数出 d 个差还不够，必须检查无关。

5. 含参方程：在除参数之前分情况

方阵可以先算行列式，非零时唯一解；为零的每个参数值要代回增广矩阵。非方阵则直接消元。

例如

$$\begin{cases}x+y=1,\\x+ay=c.\end{cases}$$

第二式减第一式得 $(a-1)y=c-1$。此时不能直接除以 $a-1$，因为它可能为零。

参数	结果
$a\neq 1$	$y=(c-1)/(a-1)$，$x=1-y$，唯一解
$a=1,c\neq 1$	$0=c-1$ 矛盾，无解
$a=1,c=1$	只剩 $x+y=1$，通解 $(1-t,t)^{\mathrm{T}}$

“行列式为零”只说明不可能唯一解，不能区分无解与无穷多解。

6. 几何意义：秩描述公共交集，不包办两两位置

三元方程 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i$ 表示一个平面，须先有 $(a_i,b_i,c_i)\neq 0$。三个平面联立就是求它们的公共点。

系数秩	增广秩	三个平面的公共交集
3	3	一个点
2	2	一条直线
1	1	一个平面（三平面重合）
2	3	空集
1	2	空集

尤其注意：$r(A)=2, r(A,b)=3$ **只保证没有公共点，不保证两两相交。**

反例：$x=0, x=1, y=0$ 的系数秩为 2、增广秩为 3，但前两个平面平行。如果额外知道任意两个法向量不成比例，才能断言三个平面两两相交却无公共点；这时三条交线互相平行，可形成三棱柱的侧面。

有公共点时，交集维数是 $3-r(A)$。这是前面的自由参数个数换成了几何语言。

7. 同解与公共解：两个不同的问题

同解问两个解集是否完全相同。**公共解**问两个解集交在什么地方，即使它们不同也可以求公共解。

7.1 齐次同解

A, B 列数相同，方程都使用同一个未知量 x。把方程上下叠起来，公共解满足

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0.$$

因此

$$Ax=0 \text{ 与 } Bx=0 \text{ 同解} \iff r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

为什么不能只比较 $r(A)=r(B)$？两个不同方向的直线都是一维，但不是同一条直线。拼接后的秩相同，才保证加上另一组方程没有减少解。

7.2 非齐次同解

对两个**都有解**的方程组，准确的条件是：齐次部分同解，并且有一个公共特解。因为这样它们都等于“同一个特解 + 同一个齐次解空间”。

常数列无须相同。例如 $x=1$ 与 $2x=2$ 同解，但右边分别为 1、2。如果两个方程组都无解，解集也同为空集，需单独处理。

7.3 公共解直接联立

$$Ax=b,\ Bx=c \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}.$$

可以一次消元，也可以先求一个通解、代入另一个方程组。后一种方法变量少时更方便。

8. 矩阵方程：每一列各解一次

若 $X=(x_1,\dots,x_s)$、$B=(b_1,\dots,b_s)$，则

$$AX=B \iff Ax_j=b_j \quad (j=1,\dots,s).$$

所以每一列都相容，整体才有解；判据为 $r(A)=r(A,B)$，这里是左右拼接。各列的自由参数一般彼此独立，不能强行用同一个参数。

$XA=B$ 可以转置为 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$；它的相容条件是 $r(A)=r\binom{A}{B}$。

若 A,B 为可逆方阵，$AXB=C$ 的唯一解是 $A^{-1}CB^{-1}$。这里要求可逆的是两侧系数矩阵 A,B，不是右端 C。

9. 克拉默法则：有条件的另一条求解路线

n 个方程、n 个未知量，且 $D=|A|\neq 0$ 时，

$$x_j=\frac{D_j}{D},$$

D_j 是把 A 第 j 列换成常数列 b 的行列式。例：$x+y=3, 2x-y=0$，有

$$D=-3,\quad D_1=-3,\quad D_2=-6,$$

所以 $x=1, y=2$。当 $D=0$ 时不能除以它，应回到消元与秩讨论。

10. 按卡点回练

不会的动作	练习
从自由未知量拆出基础解系	2、7
特解加齐次通解	3、11、13
同解、公共解	8、12、17
含参分类	9、16
几何意义与条件	6、10、16
已知解的组合与证明	4、15、18
矩阵方程按列拆开	14