线性代数 第3讲 · 向量 · 试题

> **用法**：先过 01-考点手册，再限时 95 分钟做本卷，最后对 03-解析。
> **参考**：本地题库第 11 章与参考仓库对应章节。年份标注用于定位知识块，题面另设数据。本次保留 18 道题及原题号，解析已经重写核算。
> **难度**：A ★☆☆ · B ★★☆ · C ★★★。

A 组 · 基础（直接判定，★☆☆）

1. 【线性相关性 🟧2024·6 骨架】设

$$\alpha_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,5)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性；

（Ⅱ）若线性相关，写出一个具体的线性关系式（即求出不全为零的 k_1,k_2,k_3 ）。

2. 【秩与极大无关组 🟧2017·13 骨架】设

$$\alpha_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,4,-2)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_4=(1,3,0)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求向量组的秩；

（Ⅱ）求一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

3. 【线性表示 · 唯一性】设

$$\beta=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）判断 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并说明表示法是否唯一；

（Ⅱ）若可以，求出表示式。

4. 【内积、长度与正交】设

$$\alpha=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\quad \beta=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\quad \gamma=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）验证 α,β,γ 两两正交，并求各自的长度；

（Ⅱ）判断单位化后是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组规范正交基；

（Ⅲ）求内积 $(\alpha+2\beta,\ \gamma-\beta)$ 。

5. 【施密特正交化 · 两向量】设 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 。用施密特方法将它们正交化、单位化，并写出所得的规范正交组。

6. 【向量组等价 · 选择 🟧2022·7 骨架】设 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $B:\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是两个同维向量组。下列说法**正确**的是（ ）。

(A) 若 $r(A)=r(B)$，则 A 与 B 等价

(B) 若 A 与 B 等价，则 $r(A)=r(B)$

(C) 若 A 可由 B 线性表示，则 A 与 B 等价

(D) 若 A 与 B 等价，则 $s=t$

B 组 • 中等（含参、变换、求基，★★☆）

7. 【相关性 · 变换后的向量组 🟩】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。令

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_1;$$

$$\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2,\quad \gamma_2=\alpha_2-\alpha_3,\quad \gamma_3=\alpha_3-\alpha_1.$$

（Ⅰ）判断 β_1,β_2,β_3 的线性相关性；

（Ⅱ）求 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 的秩。

8. 【含参数的秩 🟧2017·13 骨架】设

$$\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,2,a)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,4,a^2)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求 a 的值，使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（Ⅱ）对每一个使它们线性相关的 a，求该向量组的秩。

9. 【施密特正交化 · 三向量 🟧2021·6 骨架】设

$$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）用施密特方法将其正交化，求出 β_1,β_2,β_3；

（Ⅱ）单位化，写出规范正交组 e_1,e_2,e_3；

（Ⅲ）验算 $(\beta_3,\beta_1)=0$ 与 $(\beta_3,\beta_2)=0$。

10. 【等价判定 · 说明理由】设

$$A:\ \alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}};\qquad B:\ \beta_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\ \beta_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）判断 A 与 B 是否等价，并说明理由；

（Ⅱ）再取 $C:\ \gamma_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $D:\ \delta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，判断这两个组是否等价。由此说明"秩相等"是否为等价的充分条件。

11. 【基与过渡矩阵 🟧2019·20 骨架】设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，令

$$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基；

（Ⅱ）求从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵 C；

（Ⅲ）求 $\beta=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标。

12. 【线性表示 · 求参数 🟧2020·6 骨架】设

$$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \beta=(1,1,t)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求 t 的值，使 β 可由 α_1,α_2 线性表示；

（Ⅱ）当 β **不能**被表示时，求 $r(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ 。

13. 【坐标变换】沿用第 11 题的两组基。

（Ⅰ）已知向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$，求 γ 在标准基下的坐标；

（Ⅱ）求 $\delta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标。

14. 【秩与极大无关组 · 四维】设

$$\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

求该向量组的秩与一个极大无关组，并把不在极大无关组中的向量用它表示。

C 组 · 拔高（证明与结构，★★★）

15. 【替换定理 🟩】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，且 $k_1k_2k_3\neq 0$。证明：

（Ⅰ）β,α_2,α_3 线性无关；

（Ⅱ）一般地，把任一 α_i 换成 β 后，所得向量组仍线性无关。

16. 【交空间与维数公式 🟧2023·7 骨架】设

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}};$$
$$V_2 = L(\beta_1, \beta_2), \quad \beta_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \beta_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求 $\dim V_1$ 、$\dim V_2$ 与 $\dim(V_1+V_2)$；

（Ⅱ）求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基与维数；

（Ⅲ）验证维数公式 $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ 。

17. 【相关与无关的推证 🟩】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关。证明：

（Ⅰ）α_1 可由 α_2, α_3 线性表示；

（Ⅱ）α_4 **不能**由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

18. 【内积证明秩】设 A 为 $m \times n$ 实矩阵。证明：

（Ⅰ）$Ax = 0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ 同解，从而 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$；

（Ⅱ）A 的列向量组线性无关 $\iff$ $A^{\mathrm{T}}A$ 可逆。

> **做完对答案** → 03-解析。