第3讲 · 向量 · 解析

题号与原练习一致。每题先看“为什么这样入手”，再看计算。默认向量按列拼接；求出的表示系数要乘回原向量检查。

A 组 · 基础

第 1 题

入口： 判断相关就是找不全为零的系数，令 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$。

按分量列式：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0,\\ x_1+3x_2=0,\\ 2x_1+x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

第二式给 $x_1=-3x_2$，第一式给 $x_3=x_2$，代入第三式为 $0=0$。所以 x_2 可以自由取值。取 $x_2=1$，得

$$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

系数不全为零，因此线性相关。直接乘回检查三个分量都是零。

第 2 题

入口： 极大无关组要从原组挑向量，先按列拼，再用行变换找主元列。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1,\ R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩为 2，主元在第 1、3 列，故取原向量 α_1,α_3。化简后第 2 列是第 1 列的 2 倍，第 4 列是第 1、3 列之和；行变换保留列之间的系数关系，因此

$$\alpha_2=2\alpha_1,\qquad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_3.$$

这里可以在阶梯形上求列关系，但最终极大无关组必须写原向量。

第 3 题

入口： 材料有三个，目标在三维空间，先检查材料矩阵是否可逆。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad |A|=2\neq 0.$$

所以任意三维目标都能唯一表示。具体系数满足

$$x_1+x_3=1,\quad x_1+x_2=0,\quad x_2+x_3=2.$$

由 $x_2=-x_1, x_3=1-x_1$，第三式给 $1-2x_1=2$，所以

$$\beta = -\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 + \tfrac{3}{2}\alpha_3.$$

本题行列式非零已经保证存在且唯一，无须另算增广矩阵的秩。

第 4 题

三对内积为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2 - 4 + 2 = 0, \quad \langle \alpha, \gamma \rangle = 2 + 2 - 4 = 0, \quad \langle \beta, \gamma \rangle = 4 - 2 - 2 = 0.$$

三个长度都是 $\sqrt{9} = 3$。除以 3 后，得到三个两两正交的单位向量；三维空间中三个无关向量就是一组基，因此是规范正交基。

最后一问利用正交性可少算：

$$\langle \alpha + 2\beta, \gamma - \beta \rangle = 0 - 0 + 0 - 2\langle \beta, \beta \rangle = -18.$$

第 5 题

入口： 从第二个向量中减去第一个方向的投影。

$$u_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad u_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}} - \tfrac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}} = (1/2, -1/2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这里 u_2 就是第二个正交向量。内积 $1/2 - 1/2 = 0$，长度分别为 $\sqrt{2}, \sqrt{6}/2$。单位化得

$$e_1 = \frac{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{(1,-1,2)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{6}}.$$

减投影时除长度平方，单位化时才除长度。

第 6 题

答案 **B**。

A 错：两个组各只有一个向量，分别为 $(1,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $(0,1)^{\mathrm{T}}$，同秩但不能互相表示。

B 对：互相表示分别给出 $r(A) \le r(B)$ 和 $r(B) \le r(A)$。

C 错：单向表示不够。$\{e_1\}$ 可由 $\{e_1, e_2\}$ 表示，反方向不行。

D 错：$\{e_1, e_2\}$ 与 $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ 等价，个数不同。

B 组 • 中等

第 7 题

入口： 原组无关，把新组的系数按列排成矩阵。

$$C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |C_\beta| = 2.$$

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $B=AC_\beta$。因为 A 列无关，$AC_\beta y=0$ 等价于 $C_\beta y=0$；后者只有零解，故 β 组无关。

对 γ 组，$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$，所以秩至多为 2。还要证明至少为 2：若 $p\gamma_1+q\gamma_2=0$，展开得

$$p\alpha_1+(-p+q)\alpha_2-q\alpha_3=0.$$

原组无关，故 $p=q=0$。因此 γ_1,γ_2 无关，秩恰为 2。只找出一条关系，不能直接断言秩就是 2。

第 8 题

按列拼接，注意第 2 行是 $(1,2,4)$：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&a&a^2\end{pmatrix}.$$

第 2、3 列各减第 1 列，沿首行展开：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3\\a-1&a^2-1\end{vmatrix}=a^2-1-3(a-1)=(a-1)(a-2).$$

所以相关恰在 $a=1$ 或 $a=2$。这两个值下秩都小于 3；但前两列的前两行组成的子式为 $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$，与 a 无关，所以秩至少为 2。故两种情形秩都为 2。

注意 $a=1$ 时 $\alpha_2=(1,2,1)^{\mathrm T}$，并不等于 α_1；不要沿用旧解析中的这个错误判断。

第 9 题

前两步与第 5 题相同：

$$\beta_1=(1,1,0)^{\mathrm T},\qquad \beta_2=(1/2,-1/2,1)^{\mathrm T}.$$

第三步需要分别减两个投影。先算系数：

$$\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}=\frac12,\qquad \frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}=\frac{1/2}{3/2}=\frac13.$$

所以

$$\beta_3=(0,1,1)^{\mathrm T}-\tfrac12(1,1,0)^{\mathrm T}-\tfrac13(1/2,-1/2,1)^{\mathrm T}=(-2/3,2/3,2/3)^{\mathrm T}.$$

验算 $\langle\beta_3,\beta_1\rangle=-2/3+2/3=0$，$\langle\beta_3,\beta_2\rangle=-1/3-1/3+2/3=0$。

三个长度依次为 $\sqrt2,\sqrt6/2,2\sqrt3/3$，因此

$$e_1=\frac{(1,1,0)^{\mathrm T}}{\sqrt2},\quad e_2=\frac{(1,-1,2)^{\mathrm T}}{\sqrt6},\quad e_3=\frac{(-1,1,1)^{\mathrm T}}{\sqrt3}.$$

第 10 题

直接看出 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$、$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$。再反解：

$$\alpha_1=(\beta_1+\beta_2)/2,\qquad \alpha_2=(\beta_1-\beta_2)/2.$$

能互相表示，故两组等价。这里直接写出双向表示比同时求三个秩更清楚。

第二问的两个向量分别在不同坐标轴上，不能互相表示，故不等价；它们的秩却都为 1。因此同秩不是向量组等价的充分条件。

第 11 题

$$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad |C|=-2\neq 0.$$

所以这三个向量是一组基。旧基是标准基，旧基矩阵为 E，新基矩阵为 C，满足“新基 = 旧基乘 C”，因此过渡矩阵就是上面的 C。

求 β 在新基下的坐标，应解 $Cx=\beta$：

$$x_1+x_3=1,\quad x_2+x_3=2,\quad x_1+x_2=3.$$

前两式相加减第三式，得 $2x_3=0$。于是坐标为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$。验算 $\alpha_1+2\alpha_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$。

第 12 题

设 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，比较分量得到 $c_1=1,c_2=1,c_1+c_2=t$。因此能表示恰在 $t=2$，且表示为 $\alpha_1+\alpha_2$。

$t\neq 2$ 时，前两向量无关、秩为 2，而 β 提供新方向，三向量组秩为 3。也可用 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta|=t-2$ 核验。

第 13 题

第一问已经给了新基坐标，按坐标加权：

$$\gamma=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=(5,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

第二问是反向求系数，解 $Cx=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$：

$$x_1+x_3=1,\quad x_2+x_3=1,\quad x_1+x_2=1.$$

前两式相减得 $x_1=x_2$，第三式得 $x_1=x_2=1/2$，继而 $x_3=1/2$。所以坐标为 $(1/2,1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$。

第 14 题

观察可得

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,$$

所以秩至多为 3。还要确认前三个向量无关：若 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=0$，看第 1 分量得 $c_1=0$，第 2 分量得 $c_2=0$，第 3 分量得 $c_3=0$。因此前三个向量无关，秩恰为 3，它们构成一个极大无关组。

这题也可按列拼接、行消元，结果一致。先观察关系，再补无关性证明，可以少算很多。

C 组 · 证明与结构

第 15 题

入口： 证明新组无关，就假设它的一个线性组合为零，再证明所有系数都为零。

设 $c\beta + d\alpha_2 + e\alpha_3 = 0$。代入 β 的表示式：

$$ck_1\alpha_1 + (ck_2 + d)\alpha_2 + (ck_3 + e)\alpha_3 = 0.$$

原组无关，所以 $ck_1 = 0, ck_2 + d = 0, ck_3 + e = 0$。由 $k_1 \neq 0$ 得 $c = 0$，再得 $d = e = 0$，证毕。

一般替换 α_i 时，展开后 α_i 的系数是 ck_i。由于 $k_i \neq 0$，同样先推出 $c = 0$，再推出其余系数为零。被替换位置对应的系数非零，是这个证明的关键。

第 16 题

每组的两个向量都不成比例，故 $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$。把 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 按列拼，行列式为 2，说明和空间包含三个无关向量；又在 $\mathbb{R}^3$ 中，故 $\dim(V_1 + V_2) = 3$。

交空间中的向量同时满足

$$w = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2.$$

比较三个分量：

$$x_1 = y_1, \quad x_1 + x_2 = y_2, \quad x_2 = y_1 + 2y_2.$$

把前两式代入第三式，得 $x_2 = 3x_1 + 2x_2$，即 $x_2 = -3x_1$。令 $x_1 = t$，得到

$$w = t(\alpha_1 - 3\alpha_2) = t(1, -2, -3)^{\mathrm{T}}.$$

这个非零方向就是一组基，交空间维数为 1。检查它在第二组里的表示是 $\beta_1 - 2\beta_2 = (1, -2, -3)^{\mathrm{T}}$。维数公式为 $3 = 2 + 2 - 1$。

若用平面法核验，两个平面是 $x - y + z = 0$ 与 $x + 2y - z = 0$，法向量叉积为 $(-1, 2, 3)$，与所得方向相反，是同一条直线。

第 17 题

由第一组三向量相关，存在不全为零的 c_1, c_2, c_3 使

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0.$$

第二组无关，所以其中的 α_2, α_3 也无关。如果 $c_1 = 0$，就会推出 $c_2 = c_3 = 0$，与“不全为零”矛盾。故 $c_1 \neq 0$，可以解出

$$\alpha_1 = -\frac{c_2}{c_1}\alpha_2 - \frac{c_3}{c_1}\alpha_3.$$

若 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示，把上式代入，就会使 α_4 能由 α_2, α_3 表示，违反第二组无关。因此不能表示。

关键是先证明要除的 c_1 非零，不能直接除。

第 18 题

先证明两方向。$Ax=0$ 时，左乘 A^{T} 得 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$；反之若 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，左乘 x^{T}：

$$0=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=\sum_i (Ax)_i^2.$$

实数平方和为零，所以每个分量为零，故 $Ax=0$。两组同解，未知量个数同为 n，所以

$$n-r(A)=n-r(A^{\mathrm{T}}A),$$

得到同秩。这里用的是第 4 讲的解空间维数公式。

A 列向量无关，等价于 $r(A)=n$，再等价于 $r(A^{\mathrm{T}}A)=n$；后者是 n 阶方阵，满秩即可逆。证明同时说明了为什么题设强调实矩阵。