第2讲 · 矩阵：从会乘到会判断

这讲解决四件事：矩阵怎样乘，怎样求逆，怎样算秩，怎样利用结构少算。先读第 1—5 节，再做练习 1—8；第 6—9 节配合练习 9—18。第一次读不要求背完公式，要求能把例题的每一步自己写出来。

全讲默认实矩阵。O 是零矩阵，E_n 是 n 阶单位矩阵；阶数清楚时写 E。A^{T} 是转置，A^{-1} 是逆，A^* 是伴随，$r(A)$ 是秩。这些是不同操作。

1. 先看大小，再做乘法

$m \times n$ 矩阵有 m 行、n 列。加法要求两个矩阵同型，数乘就是每个元素都乘这个数。

乘法要求左边的列数等于右边的行数：

$$A_{m\times n}B_{n\times s} = (AB)_{m\times s}.$$

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

乘积第 1 行第 2 列，取 A 的第 1 行与 B 的第 2 列相乘再相加，得到 $1\times 0 + 2 \times 3 = 6$。其余位置同样算：

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

换顺序会改变结果。结合律 $A(BC) = (AB)C$ 和分配律仍成立；交换律一般不成立。因此

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

只有确认 $AB = BA$，才能合并成 $A^2 + 2AB + B^2$。同一个矩阵的幂可以合并：$A^pA^q = A^{p+q}$。

为什么不能随意消去？ 取

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

两者都非零，但 $DF = O = DO$。所以 $DB = DC$ 且 $D \neq O$，仍可能 $B \neq C$。对方阵，若 D 可逆，才可以左乘 D^{-1} 消去它。

贯穿后面两讲的理解： 若 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$，则

$$Ax = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

矩阵乘列向量，就是按 x 中的系数，把矩阵各列组合起来。向量的“线性表示”和“解方程”都从这句话出发。

2. 转置、行列式与特殊矩阵

转置是把原来的第 i 行变为新的第 i 列。$m \times n$ 转置后变为 $n \times m$，且

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

先检查大小：右边是 $s \times n$ 乘 $n \times m$，才会得到 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的 $s \times m$。加法转置不用反序。

只有方阵有行列式。矩阵 A 是一张数表，$|A|$ 是一个数。对同阶方阵：

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^{\mathrm{T}}| = |A|, \quad |kA| = k^n|A|.$$

最后一式的 n 是阶数，因为每一行都提出一个 k。一般没有 $|A+B| = |A| + |B|$；二阶 $A = B = E$ 时，左边为 4，右边为 2。

名称	条件	现在怎样使用
对角矩阵	非对角元素全为 0	幂按对角元素分别求
对称矩阵	$A^{\mathrm{T}} = A$	转置后不变
反对称矩阵	$A^{\mathrm{T}} = -A$	主对角为 0；奇数阶行列式为 0
正交矩阵（方阵）	$Q^{\mathrm{T}}Q = E$	$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$
幂等矩阵	$A^2 = A$	正整数次幂都等于 A
对合矩阵	$A^2 = E$	偶数次幂为 E，奇数次幂为 A
幂零矩阵	某个正整数 q 使 $A^q = O$	高次项可以截掉

正交矩阵的列向量两两垂直、长度都为 1。$|Q| = \pm 1$ 只是必要条件。例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式为 1，但两列不垂直。

任意方阵可拆成对称与反对称两部分：

$$A = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}.$$

3. 逆矩阵：找一个乘上去能得到单位阵的矩阵

对 n 阶方阵 A，若 $AB = BA = E$，则 $B = A^{-1}$。同阶方阵只需验证一侧乘积为 E 即可。

先记住三个等价条件：

$$A \text{ 可逆} \iff |A| \neq 0 \iff r(A) = n.$$

后两讲会解释，它们还等价于“列向量无关”“$Ax = 0$ 只有零解”“对每个 b，$Ax = b$ 都有唯一解”。

3.1 具体矩阵：二阶公式与行变换

若 $ad - bc \neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

更通用的办法是把 A 与 E 横着拼起来，同时作行变换。例如

$$[A \mid E] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

先 $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$，再 $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$：

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

左边变成 E，右边就是 A^{-1}。原因是这串行变换等于左乘某个 P，左块 $PA = E$，所以 $P = A^{-1}$，右块 $PE = P$。

这个横排算法要一直用行变换。若用列变换，应把 A, E 上下拼接，不能混用。

3.2 抽象矩阵：从已知关系凑出乘积

已知 $A^2 + A - 2E = O$，先把单位阵单独放一边：

$$A^2 + A = 2E \quad \Longrightarrow \quad A\frac{A+E}{2} = E.$$

于是 A 可逆，$A^{-1} = (A+E)/2$。证明可逆前，没有用到 A^{-1}。

再如 $AB = A + B$，要研究 $A - E$，可观察

$$(A-E)(B-E) = AB - A - B + E = E.$$

所以 $(A-E)^{-1} = B - E$。目标是“乘出 E”，而不是先写一个尚不知道存在的逆。

3.3 逆的顺序与矩阵方程

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}\ (k \neq 0).$$

第一式可由 $ABB^{-1}A^{-1} = E$ 检查。反序是为了让相邻因子能消掉。

方程	条件	解
$AX = B$	A 可逆	左乘得 $X = A^{-1}B$
$XA = B$	A 可逆	右乘得 $X = BA^{-1}$
$AXB = C$	A, B 均为可逆方阵	$X = A^{-1}CB^{-1}$

没有一般的 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$。若 A 可逆，可以先写 $A + B = A(E + A^{-1}B)$，再判断括号中的矩阵能否求逆。

4. 初等变换：为什么左乘改行、右乘改列

三种操作：交换两行；某行乘非零数；某行加上另一行的若干倍。列也有对应操作。从 E 做一次这样的操作，得到初等矩阵，它必可逆，因为每一步都能撤销。

先不用背容易混淆的下标。取

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

直接相乘：

$$PA=\begin{pmatrix}a&b\\2a+c&2b+d\end{pmatrix},\quad AP=\begin{pmatrix}a+2b&b\\c+2d&d\end{pmatrix}.$$

左乘 P 是第 2 行加上第 1 行的 2 倍；右乘同一个 P 是第 1 列加上第 2 列的 2 倍。左右不仅位置不同，来源和目标也要看清。

先左乘 P_1，再左乘 P_2，最终是 P_2P_1A；先右乘 Q_1，再右乘 Q_2，最终是 AQ_1Q_2。写出中间式，就不容易错。

5. 秩：数出还剩多少独立信息

先把秩理解为独立列的最大个数。它也等于独立行的最大个数。计算时化为行阶梯形，数非零行即可。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&1\\3&6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1,\,R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

有两行非零，故 $r(A)=2$。原矩阵第二列是第一列的 2 倍；第三列提供新的独立信息。**任意原矩阵的非零行数不一定是秩，化成阶梯形后才可以数。**

秩的行列式定义是“最高阶非零子式的阶数”。本例有非零二阶子式，但三阶行列式为零，所以也是秩 2。

5.1 先掌握的性质

$$0\le r(A)\le\min(m,n),\qquad r(A^{\mathrm{T}})=r(A).$$

$$r(PAQ)=r(A)\quad(P,Q\text{ 为大小匹配的可逆方阵}).$$

可逆操作不会丢掉信息。因此初等变换不改变秩。若乘的矩阵不可逆，信息可能丢失。

两个同型矩阵“等价”，指可以通过初等行、列变换互相变到；判据是同秩。它不要求两矩阵的列张成同一空间，第 3 讲会区分这两个“等价”。

5.2 秩不等式：遇到什么关系用什么式子

题目出现	可用结论	理解
乘积 AB	$r(AB)\le\min(r(A),r(B))$	连续作用不会增加独立信息
和 $A+B$	$r(A+B)\le r(A)+r(B)$	新列来自两组列的组合
乘积，公共内维为 n	$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$	Sylvester 不等式
$AB=O$，A 有 n 列	$r(A)+r(B)\le n$	上一式取 $r(AB)=0$

例如 $A^2=A$，求 $r(A)+r(E-A)$。先看到 $A(E-A)=O$，得上界 n；再看到 $A+(E-A)=E$，得

$$n = r(E) \le r(A) + r(E - A).$$

上下界相同，所以和等于 n。这个证明可以迁移：一个零乘积给上界，一个可逆的和给下界。

对实矩阵还有 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A) = r(AA^{\mathrm{T}})$。关键是

$$A^{\mathrm{T}}Ax = 0 \Rightarrow x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0.$$

反方向直接左乘 A^{T}。两个齐次方程组同解，列数相同，由“解空间维数 = 列数减秩”得同秩；第 4 讲展开这一步。

6. 伴随矩阵：先抓住一条关系

A^* 的元素来自 $|A|$ 的代数余子式，再作转置。不可逆方阵也有伴随矩阵。核心关系是

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

只有 $|A| \neq 0$ 时，才可以除以它：

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \qquad A^* = |A|A^{-1}.$$

二阶 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的伴随是 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$。三阶若可逆，可以先求逆、再乘行列式，不必总是算九个余子式。

常用性质（$n \ge 2$）：

$$|A^*| = |A|^{n-1}, \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad (AB)^* = B^*A^*,$$
$$(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}, \qquad (A^*)^* = |A|^{n-2}A.$$

二阶最后一式直接理解为 $(A^*)^* = A$。缩放指数是 $n-1$，因为每个余子式是 $n-1$ 阶行列式。

$r(A)$	$r(A^*)$	**原因**
n	n	$A^* = \|A\|A^{-1}$ 可逆
$n-1$	1	有非零余子式，所以 $A^* \neq O$；又 $AA^* = O$，故秩至多 1
至多 $n-2$	0	所有 $n-1$ 阶子式为零

7. 分块：把大矩阵当成几个小矩阵计算

仍按左行乘右列，但块的乘法顺序不能变，块的大小必须匹配。比如

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

其中 A, B 为可逆方阵。设逆为 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$。由 $MM^{-1} = E$ 得

$$BZ = O \Rightarrow Z = O, \quad AX = E \Rightarrow X = A^{-1}, \quad BW = E \Rightarrow W = B^{-1},$$
$$AY + CW = O \Rightarrow Y = -A^{-1}CB^{-1}.$$

所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}.$$

这解释了交叉块为什么有负号、为什么按这个顺序乘。

分块对角矩阵的秩相加：

$$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B).$$

上三角分块只保证秩至少为 $r(A)+r(B)$，不能直接写等号；$A=B=O$、$C\neq O$ 就是反例。

7.1 两个常用化简，要会写过程

先下块行减上块行，再右块列减左块列：

$$\begin{pmatrix}A & A\\ A & A\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & A\\ O & O\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

故秩为 $r(A)$。

对同阶方阵 A,B，令

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}E & E\\ E & -E\end{pmatrix},\quad S^{-1}=\frac{1}{2}S.$$

分块相乘得到

$$S^{-1}MS=\begin{pmatrix}A+B & O\\ O & A-B\end{pmatrix}.$$

两侧乘的矩阵可逆，所以 $r(M)=r(A+B)+r(A-B)$。这里无须 $AB=BA$。

7.2 补充：左上块可逆时的消元

若 A 可逆，先下块行减去 CA^{-1} 乘上块行，再右块列减去左块列乘 $A^{-1}B$：

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & O\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$

故秩为 $r(A)+r(D-CA^{-1}B)$。先理解这是分块消元，再记结果。

8. 矩阵幂：先算平方，找出结构

8.1 秩 1：把中间一段变成数

若 $A=uv^{\mathrm{T}}$，u,v 为列向量，则

$$A^2=u(v^{\mathrm{T}}u)v^{\mathrm{T}}=(v^{\mathrm{T}}u)A.$$

$v^{\mathrm{T}}u$ 是一个数，记为 c，便有 $A^k=c^{k-1}A$（$k\geq 2$；$A^1=A$ 单独写）。例如

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(2,-1).$$

中间数 $c=(2,-1)\binom{1}{2}=0$，所以 $A^2=O$。秩 1 也可能平方为零。

迹 $\operatorname{tr}A$ 是主对角元素之和。这里 $c=\operatorname{tr}A$。一般有 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$，这不表示 $AB=BA$。

8.2 单位阵加幂零矩阵：二项式会提前结束

若 $N^3=O$，因为 E 与 N 可交换，整数 $k\geq 2$ 时

$$(E+N)^k=E+kN+\binom{k}{2}N^2.$$

三次以上项全为零。求逆也利用消项：

$$(E-N)(E+N+N^2)=E-N^3=E.$$

更一般，$N^q=O$ 时，$(E-N)^{-1}=E+N+\cdots+N^{q-1}$。这是有限项恒等式，无须讨论无穷级数收敛。

8.3 递推：把两个状态放进一列

若 $a_{j+2}=pa_{j+1}+qa_j$，则

$$\begin{pmatrix}a_{j+2}\\a_{j+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{j+1}\\a_j\end{pmatrix}.$$

所以 $\binom{a_{k+1}}{a_k}=M^k\binom{a_1}{a_0}$。先检查 $k=0,1$ 是否与初值相符。第 5 讲会增加对角化路线 $M=P\Lambda P^{-1}$。

9. 做题时怎样选入口

看见什么	先写什么	对应练习
具体乘积、转置	写清大小，保留顺序	1、2
具体求逆	行列式或 $[A\mid E]$	3
抽象关系求逆	设法凑出 $XY=E$	7、8
参数与秩	行变换，特殊参数代回	4、9
伴随	$AA^*=\lvert A\rvert E$	5、10
分块秩	先消块，再数秩	13、14、18
高次幂	先算平方，看秩 1 或幂零	11、12
秩的证明	零乘积给上界，和给下界	16、17

10. 参考与学习边界

按本仓库 `参考仓库/Math/linear-algebra/knowledge/2-matrix/matrix.tex` 的矩阵运算、逆、初等变换、秩主线，以及 `exercise/2-matrix/matrix.tex` 的矩阵幂、抽象求逆、分块求逆和矩阵方程题型重新组织。参考稿也有笔误，所有结论仍须检查条件。

题型锚点沿用本地题库：可逆判定（2017·5、2022·5），初等变换（2018·21、2020·5），分块秩（2018·6、2021·7、2023·5），矩阵幂与递推（2016·21、2024·21），秩不等式（2025·7）。锚点用于标识知识点，不据此预测下一年考什么。

接着打开 02-试题。不会时先翻对应节的例题，解析留到尝试之后。