概率论 第6讲 · 数理统计 · 考点手册

> **定位**：这是概率论的**收尾大章**，也是数学一**独有的重头戏**（区间估计、假设检验「仅数学一」）。真题库对应 **第 20 章（数理统计的基本概念）2 题 · 第 21 章（参数估计）10 题 · 第 22 章（假设检验）3 题**，合计 **15 题、116 分**，其中**参数估计标注「热门」**——近十年**年年一道 11–12 分解答题**。
> **用法**：先通读本手册建立框架 → 做 02-试题（18 题，约 80 分钟）→ 对 03-解析。
> **来源记号**：🟦 视频讲次 · 🟧 真题库 · 🟩 参考仓库。

---

0. 本讲定位与学习地图

0.1 一句话概括全部内容

> **数理统计 = 「用样本推断总体」**：先拿样本造工具（**统计量**），弄清工具服从什么分布（**抽样分布**），再用工具反推总体的未知参数（**点估计 → 区间估计 → 假设检验**）。

0.2 六节地图

节	内容	视频	真题热度
§1	总体与样本（简单随机样本）	🟦02	冷门（概念题不单独出）
§2	**统计量及其分布**（三大分布 + 正态总体抽样分布）	🟦03 🟦04	隔年一道选填（🟧2017·8、🟧2023·9）
§3	**参数的点估计**（矩估计 / 极大似然 / 无偏有效一致）	🟦05	★★★★★ **年年必考解答题**
§4	区间估计（枢轴变量法，**单总体四大 + 两总体两类**，仅数一）	🟦06	数一选填（🟧2016·14）
§5	假设检验（**单总体六大 + 两总体三类**与拒绝域，仅数一）	🟦07	数一单选（🟧2025·10）
§6	两类错误（α 与 β）	🟦08	数一单选（🟧2018·8、🟧2021·10）

0.3 三条主线

1. **独立性**：数理统计的一切都建立在「$X_1, \cdots, X_n$ **相互独立**且与总体**同分布**」上。看到"简单随机样本"六个字，立刻把它翻译成 **i.i.d.**。
2. **标准化**：$\chi^2/t/F$ 三大分布的构造，本质都是「**把正态变量化成标准正态，再按定义拼**」。
3. $\frac{1}{n}\sum X_i^k$ **与** $E(X^k)$ **的替换**：矩估计的全部内容；也是**大数定律**在统计里的投影。

1. 总体与样本 🟦02🟩

1.1 基本名词

名词	含义
总体	研究对象的全体；数学上就是一个**随机变量** X （及其分布）
个体	组成总体的每一个元素
简单随机样本	n 个**相互独立**且**与总体 X 同分布**的随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$，容量为 n
样本值（观测值）	一次抽样得到的 n 个具体数 $(x_1,\cdots,x_n)$

> **记忆**：概率论里叫「**独立同分布（i.i.d.）**」，数理统计里叫「**简单随机样本**」——同一件事的两个名字。

1.2 样本的联合分布（核心公式）

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$ （密度 $f(x)$，分布律 $p(x_i;\theta)$ ），则样本的联合分布为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i),\qquad f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i),\qquad P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i).$$

> ⚠️ **这就是**"简单随机样本"**的全部价值**：有了独立性，n 维联合分布才**等于一维分布的连乘**。后面极大似然估计的似然函数 $L(\theta)=\prod f(x_i;\theta)$，用的就是这一条。

1.3 经验分布函数（了解）

把样本值从小到大排列后，定义

$$\hat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\{X_i\le x\}=\frac{\text{样本中 }\le x\text{ 的个数}}{n},$$

即"**样本落在 x 左侧的比例**"，它是分布函数 $F(x)$ 的一个估计。

> **格利文科（Glivenko）定理**：$\sup_x|\hat{F}_n(x)-F(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，即样本足够大时，**经验分布函数一致逼近真实分布。**
> 数一大纲不直接考，但它是"**用样本分布代替总体分布**"这一整套统计思想的来源——矩估计法中"样本矩 → 总体矩"就是它的特例。

1.4 分组数据（了解）

若样本值被整理成频数分布，第 i 组组中值 c_i 、频数 n_i ，则

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_i c_i n_i,\qquad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_i (c_i-\bar{x})^2 n_i.$$

2. 统计量及其分布 🟦03 🟦04 🟧2017•8 🟧2023•9 🟩

2.1 统计量的定义（判断题高频）

> 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$g(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数。若 g 中**不含任何未知参数**，则称 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 为**统计量**。

判断口诀："**能不能算出来**"——只要表达式里出现**未知参数**（如 μ、σ），它就不是统计量。

> **例**：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 **均未知**时
>
> - X_1+X_2、$\sum X_i$、$\max X_i$、$X_1^2+X_2^2$ —— **是**统计量（不含未知参数）；
> - $\sum(X_i-\mu)^2$、$\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}$ —— **不是**统计量（含 μ 或 σ）。

2.2 常用统计量

名称	记号	公式
样本均值	$\bar{X}$	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
样本方差	S^2	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
样本标准差	S	$S=\sqrt{S^2}$
样本 k 阶原点矩	A_k	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$
样本 k 阶中心矩	B_k	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

恒等式（化简必备）：

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2.$$

2.3 样本均值与样本方差的数字特征（必背）

设 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本，则

$$EX_i=\mu,\quad DX_i=\sigma^2,\qquad \boxed{E\bar{X}=\mu,\quad D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}},\qquad \boxed{ES^2=\sigma^2}.$$

> **为什么样本方差除以 $n-1$？** 因为 $\sum(X_i-\bar{X})^2$ 中用了 $\bar{X}$ 代替 μ，损失了 1 个自由度，导致 $E\left[\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2<\sigma^2$（**有偏**）。除以 $n-1$ 恰好修正为 σ^2。
> **一句话**：$n-1$ **是为了无偏性。**（这也解释了 χ^2 分布里为什么是 $n-1$ 自由度。）

2.4 三大抽样分布 🟧2017•8

2.4.1 χ^2 分布（卡方）

构造：$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且均 $\sim N(0,1)$，则

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\ \sim\ \chi^2(n)\quad(\text{自由度为 }n).$$

性质：

性质	内容
可加性	$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$、$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$ 独立 $\Longrightarrow\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$
期望方差	$E\chi^2(n)=n$，$D\chi^2(n)=2n$

上 α 分位点：$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$（**注意 χ^2 分布不对称**，上下分位点要分别查）。

2.4.2 t 分布（学生氏）

构造：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X 与 Y **独立**，则

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\ \sim\ t(n).$$

性质：

- 概率密度是**偶函数**，图形**关于 y 轴对称**、比标准正态**更"矮胖"**（尾部厚）；
- n 很大时近似 $N(0,1)$；
- $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$（**对称性**）；
- $t^2\sim F(1,n)$。

> **用途**：σ **未知**时，用样本标准差 S 代替 σ 估 n 的均值——这就是 t 分布的原始动机。

2.4.3 F 分布

构造：$U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，U 与 V **独立**，则

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}\ \sim\ F(n_1,n_2).$$

性质：

性质	内容
倒数	$F \sim F(n_1,n_2) \Longrightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$
分位点互化	$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$
与 t 的关系	$t \sim t(n) \Longrightarrow t^2 \sim F(1,n)$

> ⚠️ **易错**：F 分布的两个自由度**顺序不能反**！$F(n_1,n_2)$ 里 n_1 是**分子**的自由度，n_2 是**分母**的自由度。

2.5 正态总体下的抽样分布（本节最重要） 🟧2017•8 🟧2023•9

设 $X_1,\cdots,X_n$ 来自 $N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X}$、S^2 为样本均值与样本方差。

（一）单个正态总体（四条定理）

①	$\bar{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right) \iff \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
②	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$　　（μ 已知）
③	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$　　（μ 未知）
④	$\bar{X}$ 与 S^2 **相互独立**，　$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$　　（σ 未知）
⑤	$\dfrac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1,\,n-1)$　　（由 ④ 取平方，$t^2 \sim F(1,n-1)$）

> **②→③ 的口诀**："μ **换成** $\bar{X}$，**自由度减一**"。
> **①→④ 的口诀**："σ **换成** S，**正态换** t，**自由度** $n-1$ "。
> **④ 的独立性**是正态总体**独有的性质**（一般总体不成立），它是 t 分布构造的前提，**必须记住。**

（二）两个正态总体（三条定理）

设 $X_1,\cdots,X_m$ 来自 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ 来自 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，**两组样本相互独立**，记

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2}{m+n-2}\quad(\text{合并方差})$$

则

$$
\text{①}\quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)
$$

$$
\text{②}\quad \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,\,n-1)
$$

$$
\text{③}\quad \text{当 } \sigma_1^2=\sigma_2^2 \text{ 时},\quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)
$$

> **② 的推导就是"拼 F "**：$\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1)$ 、$\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$，两者独立，按定义相除、各除自由度 $\Rightarrow$ 得 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$。
>
> 🟧 **2023•9 就是考这一条**：只要两个总体的方差比 $\sigma_1^2:\sigma_2^2$ 已知，就能把系数调出来。

（三）拼装三大分布的"三步法"（考场通用）

1. **先算均值和方差**：把线性组合 $a_1X_1+\cdots+a_kX_k$ 化成 $N(\text{均值},\text{方差})$；
2. **标准化**：除以标准差得到 $N(0,1)$，**平方**得 $\chi^2(1)$；
3. **按定义拼**：χ^2 **加**、t **除根号**、F **上下除各自自由度。**

⚠️ **三个恒定陷阱**：

陷阱	正确做法
忘了标准化就平方	必须写成 $\left(\dfrac{\cdot}{\sigma}\right)^2$ 才是 $\chi^2(1)$；系数不对就不是 χ^2
独立性未验证	分子含 X_1、分母也含 X_1 时**不独立**，不能用 t /F 定义
自由度算错	χ^2 用 n （或 $n-1$ ）、t 用 $n-1$、F 用 $(m-1,n-1)$

2.6 顺序统计量 🟧2016•23 🟧2024•22

把样本按**从小到大**排列：$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$。

- $X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ —— **最小**顺序统计量；
- $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ —— **最大**顺序统计量。

最大值/最小值的分布（背下来，解答题直接用）

$$
F_{(n)}(x)=[F(x)]^n,\qquad f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x);
$$

$$
F_{(1)}(x)=1-[1-F(x)]^n,\qquad f_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x).
$$

> **推导（一行）**：$F_{(n)}(x)=P\{\max\le x\}=P\{X_1\le x,\cdots,X_n\le x\}\overset{\text{独立}}{=}\prod P\{X_i\le x\}=[F(x)]^n$。
> 最小值用**对立事件**：$P\{\min>x\}=P\{X_1>x\}^n=[1-F(x)]^n$。

常用期望（θ 为参数上限型分布时必用）

总体	$EX_{(n)}$	$EX_{(n)}^2$
$X\sim U(0,\theta)$	$\frac{n}{n+1}\theta$	$\frac{n}{n+2}\theta^2$
$f(x)=\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta$	$\frac{3n}{3n+1}\theta$	$\frac{3n}{3n+2}\theta^2$
$f(x)=\frac{2x}{\theta^2},0<x<\theta$	$\frac{2n}{2n+1}\theta$	$\frac{2n}{2n+2}\theta^2$

> **一般式**：若 $f(x)=\frac{kx^{k-1}}{\theta^k},0<x<\theta$，则 $X_{(n)}$ 服从「幂型」，$EX_{(n)}=\frac{kn}{kn+1}\theta$。

（了解）第 k 个顺序统计量的密度

$$f_{(k)}(x)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left[F(x)\right]^{k-1}\left[1-F(x)\right]^{n-k}f(x),$$

把 $k=1$、$k=n$ 代进去，正好还原上面的 min、max 两式。数一大纲不直接要求，但讲课时会提——**考场上 max/min 够用了。**

---

3. 参数的点估计 🟦05 🟧（本讲分值最重）

> **点估计 = 造一个统计量 $\hat\theta(X_1,\cdots,X_n)$ 去"顶替"未知参数 θ。** 两种造法：**矩估计**（用矩换矩）与**极大似然**（找最"像"的参数）。

3.1 矩估计法

思想：**用样本矩替换总体矩**（大数定律保证"样本矩 → 总体矩"）。

步骤：

1. 写出含 θ 的总体矩 EX^k （**一个参数用一阶矩，两个参数用一、二阶矩**）；
2. 令 $EX^k=A_k=\frac{1}{n}\sum X_i^k$；
3. 解方程得 $\hat\theta$。

两个参数的模板：

$$\begin{cases}EX=\bar X\\ EX^2=\frac{1}{n}\sum X_i^2\end{cases}\Longrightarrow\ \hat\mu=\bar X,\quad \hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar X)^2=B_2.$$

> ⚠️ **注意**：矩估计给出的方差估计是 B_2 **（除以 n）**，**不是** S^2 **（除以 $n-1$）**！两者都是 σ^2 的估计量，但**只有 S^2 无偏。**

3.2 最大似然估计（MLE）

思想：既然观测到了 $(x_1,\cdots,x_n)$，那就选**让这组样本出现概率最大**的 θ。

步骤（常规可微情形）：

1. **写似然函数** $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$（离散型用 $\prod p(x_i;\theta)$）；
2. **取对数** $\ln L(\theta)$（连乘变连加）；
3. **求导令零** $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$；
4. **解出** $\hat\theta$，**并写成大写** $\hat\theta(X_1,\cdots,X_n)$ **才是"估计量"。**

> **为什么取对数？** 因为 $\ln$ 单调递增，L 与 $\ln L$ 在**同一点**取极值，而连加比连乘好求导。

不可微 / 单调情形（每年必有一道，必须掌握）

当 $L(\theta)$ 关于 θ **单调**（通常因为支撑集含 θ）时，$\hat\theta$ **不是驻点**，而是**取值边界**：

情形	结论
$X\sim U(0,\theta)$，$f=\dfrac{1}{\theta}$，$0<x<\theta$	$\hat\theta=X_{(n)}=\max X_i$（**取最大**，保证所有 $x_i<\theta$）
$X\sim U(\theta_1,\theta_2)$	$\hat\theta_1=X_{(1)}$，$\hat\theta_2=X_{(n)}$
$f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}$，$\theta\le x\le 2\theta$ 型	由 $\theta\le X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}\le 2\theta$ 夹出 $[\frac{X_{(n)}}{2},\,X_{(1)}]$，任取一点皆可（**通常取端点**）

> **口诀**：**"能求导就求导；不能求导看单调，往边界上找。"**

三类高频载体（记住结果，考场直接写）

分布	密度	矩估计	极大似然估计
拉普拉斯	$\dfrac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert/\lambda}$	$\hat\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\lvert X_i\rvert$	$\hat\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\lvert X_i\rvert$
均匀 $U(0,\theta)$	$\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta$	$\hat\theta=2\bar X$	$\hat\theta=X_{(n)}$
幂型	$f(x)=\theta x^{\theta-1}$ $(0<x<1,\ \theta>0)$	$\hat\theta=\dfrac{\bar X}{1-\bar X}$	$\hat\theta=-\dfrac{n}{\sum\ln X_i}$

> **两个特殊的"坑"分布**：
>
> - **半正态**（含 $x\ge\mu$ 的指示）：$\hat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum(X_i-\mu)^2$；常数 $A=\sqrt{2/\pi}$；
> - **两样本同参数**（如 $X\sim P(\lambda)$、$Y\sim P(2\lambda)$）：把**两组似然先相乘再求导**，得 $\hat\lambda=\dfrac{\sum X_i+\sum Y_j}{n+2m}$。

极大似然估计的不变性原理（重要）

> 若 $\hat\theta$ 是 θ 的极大似然估计，$g(\cdot)$ 是任意函数（通常单调），则 $g(\hat\theta)$ **是** $g(\theta)$ **的极大似然估计。**

$$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}).$$

用途：不必为新参数重新建似然函数。典型例子：

- 正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$：$\hat{\sigma}^2_{MLE} = \dfrac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$ （注意**除以 n 、有偏**）$\Longrightarrow$ 直接得 $\hat{\sigma}_{MLE} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{MLE}}$；
- $X \sim U(0, \theta)$：$\hat{\theta} = X_{(n)} \Longrightarrow \theta^2$ 的 MLE 就是 $X^2_{(n)}$、$1/\theta$ 的 MLE 就是 $1/X_{(n)}$。

> ⚠️ **注意区分**：**无偏性没有不变性**！$E\hat{\theta} = \theta$ **推不出** $Eg(\hat{\theta}) = g(\theta)$ （如 $S = \sqrt{S^2}$ 就不是 σ 的无偏估计）。**"MLE 有不变性，无偏性没有"**——这是常考的概念辨析点。

3.3 估计量的评价标准

3.3.1 无偏性（考得最多）

$$E\hat{\theta} = \theta \quad (\text{对一切 } \theta \in \Theta) \Longrightarrow \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计.}$$

无偏性的传播法则（极其好用）：

$$E\hat{\theta} = \theta \implies E(a\hat{\theta} + b) = a\theta + b.$$

> **常见结论**：$E\bar{X} = \mu$、$ES^2 = \sigma^2$ （无偏）；$B_2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$ （**有偏**）。

3.3.2 有效性

两个**都无偏**的估计量，**方差越小越有效**：

$$D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2 \Longrightarrow \hat{\theta}_1 \text{ 比 } \hat{\theta}_2 \text{ 有效.}$$

> ⚠️ **前提**：**必须先都无偏**，才能比有效性！无偏 ≠ 有效，两者是**两级筛选。**

3.3.3 均方误差（MSE）—— 2024 年新考点

$$h(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = D\hat{\theta} + \left(E\hat{\theta} - \theta\right)^2 = \text{方差} + \text{偏差}^2.$$

当 $E\hat{\theta} = \theta$ 时，$h(\hat{\theta}) = D\hat{\theta}$ （MSE 退化为方差）；否则有偏的估计量 MSE 反而可能更小。

> **2024•22 的考点**：让 MSE 最小的 c，通常**不等于**让估计无偏的 c ——**要展开成 c 的二次函数求顶点。**
> 展开模板（以 $T_c = cX_{(n)}$ 为例）：
>
> $$h(c) = c^2\, EX^2_{(n)} - 2c\theta\, EX_{(n)} + \theta^2, \qquad h'(c) = 0 \Longrightarrow c = \frac{\theta\, EX_{(n)}}{EX^2_{(n)}}.$$

3.3.4 一致性（相合性）

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta.$$

> **联系第 5 讲**：这就是**大数定律**的语言——$\bar{X}$ 是 μ 的一致估计量的直接理由。

3.4 三个标准的关系（速记）

> **无偏**管"准不准"（偏差为 0）；**有效**管"稳不稳"（方差最小）；**一致**管"样本多了会不会靠近"。
> 数学上：**无偏 + 方差趋于 0 $\Rightarrow$ 一致**。

---

4. 参数的区间估计 🟦06 🟧2016•14（仅数学一）

> **点估计给一个数，区间估计给一个"带可信度的范围"。**

4.1 基本概念

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha.$$

名词	含义
$1-\alpha$	**置信度 / 置信水平**（可信程度）
α	**显著性水平**（犯错的概率，通常 0.05、0.01、0.1）
$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$	**置信区间**；两端分别叫**置信下限**、**置信上限**
区间长度	反映**估计精度**；长度越短越精确

> **正确理解**：**不是**"θ 落在区间内的概率是 $1-\alpha$ "（θ 是常数、不是随机变量），而是"**反复抽样得到的区间中，平均 100 次有 $100(1-\alpha)$ 次盖住 θ **"。

4.2 枢轴变量法（万能套路）

1. **找点估计** $\hat{\theta}$ （一般取 MLE 或 $\bar{X}$ 、S^2 ）；
2. **造枢轴量** $I = I(\hat{\theta}, \theta)$ ：**含未知参数 θ ，但分布已知且与 θ 无关**（正态、χ^2 、t 、F ）；
3. **定分位点**：按 $P\{\text{下分位} \le I \le \text{上分位}\} = 1-\alpha$ 取上 $\alpha/2$ 分位点；
4. **解不等式**：把 θ 解到中间，得到 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 。

4.3 正态总体四大区间估计（必背表）

设 $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，置信度 $1-\alpha$ 。

待估参数	条件	枢轴量	置信区间
μ	σ **已知**	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
μ	σ **未知**	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left[\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$
σ^2	μ **已知**	$\dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left[\dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\ \dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right]$
σ^2	μ **未知**	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$

⚠️ χ^2 **区间的两端分位点"反着放"**：因为 χ^2 **分布不对称**，且 σ^2 在**分母**——所以**上分位点配下限、下分位点配上限。**这是最容易抄错的地方。

三个"看条件"的读法：

- σ 已知 → U （正态）；σ 未知 → t （且自由度 $n-1$ ）；
- μ 已知 → $\chi^2(n)$；μ 未知 → $\chi^2(n-1)$；
- **一句话**：**"知道谁就用谁，μ 未知换 $\bar{X}$ 减自由度，σ 未知换 S 变 t "。**

4.4 单侧置信区间

类型	枢轴量形式	区间
单侧**上限**（$P\{\mu<\bar{\mu}\}=1-\alpha$ ）	u_α （单侧）	$\left[\bar{X}-u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$
单侧**下限**（$P\{\mu>\underline{\mu}\}=1-\alpha$ ）		$\left(-\infty,\ \bar{X}+u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

单双侧的分位数互换：单侧用 u_α （不是 $u_{\alpha/2}$ ）；同理 $t_\alpha(n-1)$ 。
大小关系：同一置信度下，**单侧区间的"半宽"更小**（因为全部 α 集中在一侧）。

🟧 **2016•14 的考法**：给出 $\bar{X}$ 和**置信上限**，反求**置信下限。**因为双侧区间**关于 $\bar{X}$ 对称**，所以

$$\text{下限}=\bar{X}-(\text{上限}-\bar{X})=2\bar{X}-\text{上限}.$$

一句话：**"上限 + 下限 = 2 $\bar{X}$ "**（仅对均值的对称区间成立；方差区间不成立）。

4.5 两个正态总体的区间估计 🟩 （数一大纲要求）

设 $X_1,\cdots,X_m$ 来自 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ，$Y_1,\cdots,Y_n$ 来自 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ，**两组样本相互独立**，置信度 $1-\alpha$ 。

（1）均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

条件	枢轴量	置信区间
σ_1^2,σ_2^2 **均已知**	$U=\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$	$(\bar X-\bar Y)\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ **未知**（T）	$T=\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$	$(\bar X-\bar Y)\pm t_{\alpha/2}(m+n-2)\,S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$

其中合并方差 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$。

> **记法要点**：区间**中心永远是点估计 $\bar X-\bar Y$ **，半宽 = 「分位点 × 该估计量的标准差」。$\mu_1-\mu_2$ 的估计量方差是 $\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}$（**两样本方差各自除以自身容量再相加**）——别漏掉任何一项。

（2）方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

由 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$，解出

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}\right].$$

> ⚠️ **两端同样"反着放"**：因为 σ_1^2/σ_2^2 在**分母**，且 F 分布不对称——**大分位点配下限、小分位点配上限**。附：$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)=\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}$，查表时要**两个自由度都互换**。

---

5. 假设检验 🟦07 🟧2025•10（仅数学一）

5.1 基本思想

> **小概率事件在一次试验中不应发生。** 若在"H_0 成立"的前提下，观测到的样本值属于**小概率事件**，则 **拒绝 H_0 **。

5.2 假设检验四步

1. **提假设**：原假设 H_0 与备择假设 H_1（通常把"想否定的、被保护的说法"放 H_0）；
2. **选统计量**：按 σ 已知/未知、μ 已知/未知选 U、T、χ^2、F，并写出 H_0 成立时的分布；
3. **定拒绝域**：给定 α，按 $P\{\text{拒绝}H_0\mid H_0\text{真}\}=\alpha$ 定临界值；
4. **下结论**：算统计量观测值，**落在拒绝域就拒绝 H_0 **，否则接受。

5.3 三类假设与拒绝域方向

类型	H_0	H_1	拒绝域在
双边	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	**两侧**（$\lvert\cdot\rvert \geq$ ）
右侧	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	**右尾**（$\geq$ ）
左侧	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	**左尾**（$\leq$ ）

> **方向判断口诀**：**拒绝域跟着 H_1 跑**——H_1 是"$>$ "就放在右侧，H_1 是"$<$ "就放在左侧，H_1 是"$\neq$ "就放两侧。

5.4 正态总体六大检验（拒绝域速查表）

设 $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

检验参数	条件	统计量	H_1 方向	拒绝域
μ	$\sigma=\sigma_0$ **已知**（U 检验）	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert u\rvert\geq u_{\alpha/2}$
			$\mu>\mu_0$	$u\geq u_\alpha$
			$\mu<\mu_0$	$u\leq -u_\alpha$
μ	σ **未知**（T 检验）	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
			$\mu>\mu_0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$
			$\mu<\mu_0$	$t\leq -t_\alpha(n-1)$
σ^2	μ **已知**（χ^2 检验）	$\chi^2=\dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 或 $\geq\chi^2_{\alpha/2}(n)$
			$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n)$
			$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n)$
σ^2	μ **未知**（χ^2 检验）	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
			$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n-1)$
			$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

记忆口诀："σ **知用** U **、**σ **不知用** T **；**μ **知用** $\chi^2(n)$ **、**μ **不知用** $\chi^2(n-1)$ **。**"

> 🟧 **2025•10 的解法**：σ 已知 $\Longrightarrow$ 用 U 检验；$H_1:\mu>1\Longrightarrow$ **右尾**；拒绝域
>
> $$\bar{X}\ \geq\ \mu_0+Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1+Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}.$$
>
> **注意 $\sigma^2=2$ 时 $\sigma=\sqrt{2}$ **，别把方差当标准差代入。

5.5 区间估计与假设检验的对偶关系（高频理解题）

> **置信度** $1-\alpha$ **的双侧置信区间** $\Longleftrightarrow$ **显著性水平** α **的双侧检验的接受域。**

具体地：**μ_0 落在置信区间内 $\Longleftrightarrow$ 不拒绝 $H_0:\mu=\mu_0$ **。所以两类问题常常互相转化。

5.6 两个正态总体的假设检验 🟩（数一大纲要求）

两组样本来自 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$（容量 m）与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$（容量 n）且相互独立。

检验对象	条件	统计量	拒绝域（以 H_1 方向定）
$\mu_1=\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 **已知**（U 检验）	$U=\dfrac{\bar X-\bar Y}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	双侧 $\lvert u\rvert\ge u_{\alpha/2}$；单侧 $u\ge u_\alpha$ 或 $u\le -u_\alpha$
$\mu_1=\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ **未知**（T 检验）	$T=\dfrac{\bar X-\bar Y}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$	双侧 $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(m+n-2)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	两总体**正态**（F 检验）	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1)$	双侧 $F\le F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $F\ge F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$

> **口诀与单总体完全同构**："**均值比用 U/T（看方差是否已知），方差比用 F**"；方向一律**跟着 H_1 跑**。
> ⚠️ **F 检验的"不对称"**：F 分布不对称，所以双侧拒绝域要**两端分别查表**；且注意**分子方差配 $(m-1)$、分母方差配 $(n-1)$**，自由度顺序别反。

---

6. 两类错误 🟦08 🟧2018•8 🟧2021•10

6.1 定义

	H_0 **实际为真**	H_0 **实际为假**
拒绝 H_0	❌ **第一类错误（弃真）**，概率 α	✅ 正确
接受 H_0	✅ 正确	❌ **第二类错误（存伪）**，概率 β

公式：

$$\alpha=P\{\text{拒绝}H_0\mid H_0\text{为真}\},\qquad \beta=P\{\text{接受}H_0\mid H_0\text{为假}\}=P\{\text{接受}H_0\mid H_1\text{为真}\}.$$

> **一句话记忆**："**拒真 = 第一类，纳伪 = 第二类**"；**α 是在 H_0 为真的世界里算的，β 是在 H_1 为真的世界里算的。**
> ⚠️ **关键理解**：H_1 通常是一个**范围**（如 $\mu>\mu_0$），所以 β 是**关于 μ 的函数**，必须**给定具体的 μ 值**才能算——这就是 🟧2021·10 给出"$\mu=11.5$ 时"的原因。

6.2 计算 β 的四步

1. 写出**拒绝域** W；

2. 写出**接受域** $\bar{W}$（拒绝域的补集）；

3. **把分布换成** H_1 **下的分布**（关键：均值/方差要换）；

4. $\beta = P\{(\text{统计量}) \in \bar{W} \mid H_1\}$。

> **示例模板**：σ^2 已知，$W = \{\bar{X} \geq c\}$，则在 $\mu = \mu_1$（H_1 中某个值）下
>
> $$\beta = P\{\bar{X} < c\} = \Phi\left(\frac{c - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

6.3 α 与 β 的关系（必考辨析）🟧2018•8

结论	说明
样本量固定时	α 减小 $\Rightarrow$ β **增大**；β 减小 $\Rightarrow$ α 增大（**此消彼长**）
**同时减小 α 与 β **	**只能增大样本容量 n **
α 与拒绝域的关系	α 越小 $\Longrightarrow$ 临界值 c 越**远离** μ_0 $\Longrightarrow$ 拒绝域**越小**

> 🟧 **2018•8 的核心结论**：
>
> - $\alpha = 0.05$ **拒绝** $H_0 \Rightarrow \alpha = 0.01$ **不一定拒绝**（因为拒绝域缩小了）；
> - $\alpha = 0.05$ **接受** $H_0 \Rightarrow \alpha = 0.01$ **必然接受**（接受域扩大，原来在里面的还在里面）。
>
> **不等式记忆**：\ \alpha_1<\alpha_2\ （如 $0.01 < 0.05$）时，**拒绝域** $W(\alpha_1) \subset W(\alpha_2)$，**接受域**反之。
>
> 所以：**"小 α 拒绝 $\Longrightarrow$ 大 α 必拒绝；大 α 接受 $\Longrightarrow$ 小 α 必接受。"**

6.4 显著性检验

> 只控制**第一类错误**概率（即只给定 α，不控制 β）的检验称为**显著性检验**，α 称**显著性水平**。

---

7. 十年真题落点地图（🟧 第 20/21/22 章，共 15 题）

7.1 第 20 章 • 数理统计的基本概念（2 题，9 分）

年份•题号	题型	考点	本手册
2017•8	单选 4	χ^2 分布辨析（四个结论判断）	§2.5
2023•9	单选 5	F 分布（两正态总体方差比）	§2.5（二）

7.2 第 21 章 • 参数估计（10 题，93 分）— 全章最重

年份•题号	题型/分值	考点	本手册
2016·14	填空 4	置信区间（给上限求下限）	§4.3
2016·23	解答 11	次序统计量 + 无偏估计	§2.6 / §3.3.1
2017·23	解答 11	绝对误差 $Z_i=\lvert X_i-\mu\rvert$：密度 + 矩估计 + MLE	§2.6 / §3.2
2018·23	解答 11	拉普拉斯分布 MLE + $E\hat{\sigma}, D\hat{\sigma}$	§3.2
2019·23	解答 11	半正态分布：求常数 A + MLE	§3.2
2020·23	解答 11	威布尔分布：$P\{T>t\}$ + 无记忆性 + MLE	§3.2
2021·9	单选 5	无偏性 + $D(\bar{X}-\bar{Y})$（二元正态）	§2.5 ① / §3.3.1
2022·22	解答 12	泊松两样本（λ 与 2λ）MLE + $D\hat{\theta}$	§3.2
2023·10	单选 5	无偏估计（$a\lvert X_1-X_2\rvert$ 定常数）	§3.3.1
2024·22	解答 12	$U(0,\theta)$ 的 $X_{(n)}$：无偏 c + MSE 最小 c	§2.6 / §3.3.3

7.3 第 22 章 • 假设检验（3 题，14 分）

年份•题号	题型	考点	本手册
2018·8	单选 4	显著性水平与拒绝/接受的关系	§6.3
2021·10	单选 5	第二类错误（给定 $\mu=11.5$）	§6.2
2025·10	单选 5	单侧检验拒绝域	§5.4

7.4 命题规律（读三遍）

1. **参数估计是"铁打的 22 题"**：近十年 **10 题解答题（11–12 分）**，**几乎年年一题**，从未缺席。**这是本讲唯一的"必拿大题"。**
2. **MLE 占绝对统治地位**：10 题里有 **8 题**涉及极大似然估计，且**每隔几年就换一个"怪分布"**（拉普拉斯、半正态、威布尔、幂型、两样本泊松）——**考的不是计算，而是"能不能把似然函数写对 + 会不会处理不可微"。**
3. **无偏估计紧跟其后**：2016·23、2021·9、2023·10、2024·22，**四年考了四道**，典型套路是**「给一个带参数的统计量，反解系数使无偏」**。
4. **假设检验只考选填**（4–5 分），且只在 **2018、2021、2025** 出现，**三年一轮**——考的是**方向判断**与**概念辨析**，不考查表计算。
5. **区间估计**只考过一次（2016·14），属**低频**，但**只在数一**出现。

6. **两个正态总体的区间估计与检验（§4.5 / §5.6）：大纲明确要求，近十年却从未考**——属"**高性价比冷门**"。一旦出现就是套公式的送分题，两张表（均值差、方差比）务必背熟。
7. **经验分布函数（§1.3）、第 k 个顺序统计量（§2.6）**：数一大纲不直接要求，讲课会提到，考试不出——**了解即可**，别在这上面花计算时间。

---

8. 速查卡 • 陷阱清单

8.1 速记十四条

1. **简单随机样本 = i.i.d.**；联合分布 = 一维分布**连乘**（这是 MLE 的根）。
2. **统计量不能含未知参数**——含 μ、σ 的统统不是。
3. $E\bar{X}=\mu$，$D\bar{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}$，$\boxed{ES^2=\sigma^2}$（$n-1$ **是为了无偏**）。
4. 正态四条：$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$、$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$、**$\bar{X}\perp S^2$ **、$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$。
5. 两总体方差比：$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$。
6. $X_{(n)}=\max$：$F_{(n)}=F^n$；$X_{(1)}=\min$：$F_{(1)}=1-(1-F)^n$。
7. 矩估计的方差是 $B_2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2$（**有偏**）；MLE 不可微时**往边界取**（$U(0,\theta)\Rightarrow\hat{\theta}=\max X_i$）。
8. **无偏是有效性比较的前提**（两级筛选）。
9. $h(\hat{\theta})=D\hat{\theta}+(\text{偏差})^2$；**MSE 最小的 c ≠ 无偏的 c **。
10. 均值的双侧区间**关于 $\bar{X}$ 对称** $\Longrightarrow$ **上限 + 下限 = $2\bar{X}$ **。
11. 检验**方向跟着 H_1 **；$\sigma^2=2$ 时标准差是 $\sqrt{2}$。
12. **小 α 拒绝 $\Longrightarrow$ 大 α 必拒绝；大 α 接受 $\Longrightarrow$ 小 α 必接受。**
13. **两总体**：均值差区间/检验的中心是 $\bar{X}-\bar{Y}$，标准差 $\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$（或 $S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$）；方差比用 $F(m-1,n-1)$，**区间两端反着放。**
14. **MLE 有不变性**（$\widehat{g(\theta)}=g(\hat{\theta})$），**无偏性没有**（$E\hat{\theta}=\theta$ 推不出 $Eg(\hat{\theta})=g(\theta)$）。

8.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
统计量判断时漏看未知参数	逐个检查表达式里有没有 μ, σ
σ^2 与 σ 混用	$\sigma^2=2$ 时 $\sigma=\sqrt{2}$；U 检验分母是 $\sigma_0/\sqrt{n}$
样本方差分母写成 n	定义是 $n-1$；但**矩估计给出的是 n **，别混
χ^2 分布当成对称	χ^2 **不对称**，t 分布**对称**；χ^2 区间两端分位点"反着放"
拼 F 时忘记"除自由度"	$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$，**两个都要除**
t /F 定义里忽略独立性	分子分母共用同一个 X_i 时**不独立**，不能用
MLE 直接求导而不管单调性	$U(0,\theta)$ 型必须**看支撑集、取边界**
无偏性直接比有效性	**先验证都无偏**
β 忘记换 H_1 下的分布	β 用的是**真值 μ_1 **，不是 μ_0
认为"θ 落在置信区间内的概率是 $1-\alpha$ "	θ 是常数；是**区间**随机
单侧检验用了 $\alpha/2$ 分位点	单侧用 u_α 、$t_\alpha(n-1)$
两总体均值差漏掉某项方差	$\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}$ **两项都要**，别只写一项
两总体方差比区间方向写反	σ_1^2/σ_2^2 在分母 $\Longrightarrow$ **大分位点配下限**（同 χ^2 区间）
以为"无偏性"能传递	只有 **MLE** 有不变性；$E\hat{\theta}=\theta \not\Rightarrow Eg(\hat{\theta})=g(\theta)$

> **下一步**：开做 02-试题（18 题，约 80 分钟）。做完对 03-解析，把错题回挂 做题本。
> **跨讲关联**：本讲的**切比雪夫不等式与三大数定律**在第 5 讲 第5讲考点手册；**数字特征（E, D, Cov ）**见第 4 讲（待补）。