概率论 第3讲 · 多维随机变量及其分布 · 解析

> 每题含 **答案 / 思路 / 易错点**，标「真题骨架」的题给出对应真题。

A 组 · 基础

1.（Ⅰ）行和、列和：

$X\backslash Y$	**0**	**1**	**2**	$p_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.1	**0.4**
2	0.2	0.3	0.1	**0.6**
$p_{\cdot j}$	**0.3**	**0.5**	**0.2**	1

$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$。

（Ⅱ） 取 $p_{11}=0.1$，而 $p_{1\cdot}p_{\cdot 1}=0.4\times 0.5=0.2\neq 0.1$，故 X **与** Y **不相互独立。**

> **思路**：判独立要"全部成立"，否定只需**找一对反例。**
> **易错点**：p_{ij} 与 $p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ 下标要对齐（$X=1$ 是第 1 行、$Y=0$ 是第 1 列）。

2.（Ⅰ）$S_D=\dfrac{1}{2}$，

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（Ⅱ） 在 D 内 $x+y\le 1\Rightarrow y\le\min(x,1-x)$：$0\le x\le\frac{1}{2}$ 上限 x；$\frac{1}{2}\le x\le 1$ 上限 $1-x$。

$$P\{X+Y\le 1\}=2\left[\int_0^{1/2}x\,\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x\right]=2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}.$$

> **易错点**：**先画图再定限**，$y=x$ 与 $y=1-x$ 把区域切成两段。

3.（Ⅰ）$\iint f=c\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y=c\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2=c=1\Rightarrow c=1$。

（Ⅱ） $f_X(x)=\int_0^2 xy\,\mathrm{d}y=2x\ (0<x<1)$；$f_Y(y)=\int_0^1 xy\,\mathrm{d}x=\dfrac{y}{2}\ (0<y<2)$。

（Ⅲ） $f_X(x)f_Y(y)=2x\cdot\dfrac{y}{2}=xy=f(x,y)$，故 X,Y **相互独立。**

> **思路**：矩形域 + 密度可分离 $\Longrightarrow$ 一眼独立。

4.（Ⅰ） $f_X(x)=\int_0^x 3x\,\mathrm{d}y=3x^2\ (0<x<1)$；$f_Y(y)=\int_y^1 3x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}(1-y^2)\ (0<y<1)$。

（Ⅱ） $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{3x}{3x^2}=\dfrac{1}{x}\ (0<y<x)$。

（Ⅲ） $P\{Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{4}\}=\int_0^{1/2}\dfrac{1}{3/4}\,\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$。

> **易错点**：条件密度是 y 的函数（对 x 是常数）；$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ 故上限直接取 $\frac{1}{2}$。

5. $f(x,y)=1$ **（单位正方形）。** $f_Y(z-x)=1\iff z-1<x<z$，**与** $(0,1)$ **取交：**

- $0<z<1$：$f_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x=z$；
- $1\le z<2$：$f_Z(z)=\int_{z-1}^1\mathrm{d}x=2-z$。

$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(\textbf{辛普森三角形分布})$$

> **真题骨架**：🟧 2017·22 同款和分布（离散+连续），见第 10 题混合版。

6. 选（B）。

- （A）错：两正态若**不联合正态**，不相关推不出独立（反例见第 11 题）；
- （C）错：不相关 $\neq$ 独立；
- （D）错：独立**一定**推出 $\mathrm{Cov}=0$（方差存在时）；
- （B）对：二维正态的"特权"。

B 组 • 中等

7. $Z=\dfrac{Y}{X}$，**用商的密度公式（**$f_{XY}=1$ **在单位正方形）**

$$f_Z(z)=\int_0^1 x\,f_Y(zx)\,\mathrm{d}x,\qquad f_Y(zx)=1\iff 0<x<\frac{1}{z}.$$

- $0<z<1$：上限 1，$f_Z(z)=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$；
- $z\ge 1$：上限 $\dfrac{1}{z}$，$f_Z(z)=\int_0^{1/z}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2z^2}$。

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<z<1\\ \dfrac{1}{2z^2}, & z\ge 1\\ 0, & z<0\end{cases},\qquad P\{Z>1\}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}.$$

> **真题骨架**：🟧2021·22(Ⅱ) 求 $Z=Y/X$ 密度。
> **雅可比视角**：增补 $V=X$，$x=v, y=zv$，$|J|=|v|$，$f_{ZV}(z,v)=|v|f(v,zv)$，再对 v 积分，结果一致。

8.（Ⅰ）圆盘均匀 $f=\dfrac{1}{\pi}$，对 y 积分（$-\sqrt{1-x^2}\sim\sqrt{1-x^2}$）：

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot 2\sqrt{1-x^2}=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\quad(-1<x<1).$$

（Ⅱ） $f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\neq\dfrac{1}{\pi}=f(x,y)$，故 X,Y **不独立。**

> **秒杀**：取值区域是**圆**（非矩形），一步否定。

9. $f(x,y)=\dfrac{1}{2}$ **（$0<x<1, 0<y<2$），$Z=XY$：**

$$f_Z(z)=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\{0<\tfrac{z}{x}<2\}\,\mathrm{d}x,\qquad 0<\frac{z}{x}<2\iff x>\frac{z}{2}.$$

对 $0<z<2$，$x\in\left(\frac{z}{2},1\right)$：$f_Z(z)=\displaystyle\int_{z/2}^{1}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}$。

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{z}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

> **真题骨架**：🟧2018·22、2019·22 的 $Z=XY$。
> **雅可比视角**：增补 $V=X$，$x=v, y=z/v$，$|J|=1/|v|$，结果一致。

10. 全概率（离散 X 拆权重）：

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1),\qquad F_Y(t)=0\,(t<0),\ t\,(0\le t<1),\ 1\,(t\ge 1).$$

- $z<0$：0；$0\le z<1$：$\dfrac{z}{2}$；$1\le z<2$：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{z-1}{2}=\dfrac{z}{2}$；$z\ge 2$：$1$。

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z}{2}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}\Longrightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\text{即 } Z\sim U(0,2))$$

> **易错点**：$F_Y(z-1)$ 也要分段；两段在 $z=1$ 处须连续（此处恰好拼成 $\frac{z}{2}$）。

11. $EX=0$，$EY=E(X^2)=\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，$E(XY)=E(X^3)=0$。

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0,\qquad \rho_{XY}=0.$$

但 $Y=X^2$ 是 X 的函数，二者**不独立**。

> **结论**：**不相关 $\neq$ 独立**的教科书反例（偶函数型）。

12. $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=(1-e^{-\lambda z})^2\ (z>0)$，$z\le 0$ **为 0。求导：**

$$f_Z(z)=2\lambda e^{-\lambda z}(1-e^{-\lambda z})=2\lambda\left(e^{-\lambda z}-e^{-2\lambda z}\right)\quad(z>0).$$

> **配套**：min 用 $F_{\min}(z)=1-e^{-2\lambda z}$（仍服从指数分布，参数 2λ）。

13.（Ⅰ） $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,4)$。

（Ⅱ） $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2=0.5\times1\times2=1$；$D(X+Y)=1+4+2\times1=7$。

（Ⅲ） $E(Y\mid X=x)=2+0.5\times2\times(x-1)=x+1$。

> **易错点**：$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}=\dfrac{2}{1}$（**标准差**），不是 $\dfrac{4}{1}$。

14. 设切点 $U\sim U(0,1)$，$X=\min(U,1-U)\in(0,\frac12)$：

$$F_X(x)=P\{U\le x\}+P\{U\ge 1-x\}=2x\quad(0<x<\tfrac12)\ \Rightarrow\ f_X(x)=\begin{cases}2, & 0<x<\frac12\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

> **真题骨架**：🟧2021·22(Ⅰ)。

C 组 • 拔高

15.（Ⅰ） $S_D=\dfrac12$，$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（Ⅱ） $U=1\iff Y\le\dfrac{X}{2}$。对 $0<x\le1$：

$$P\{U=1,\ X\le x\}=\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^{t/2}2\,\mathrm{d}y=\int_0^x t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}.$$

又 $P\{U=1\}=\dfrac12$、$F_X(x)=x^2$，且 $\dfrac{x^2}{2}=P\{U=1\}F_X(x)$，故 U **与** X **相互独立。**

> **反直觉点**：U 是 (X,Y) 的函数却与 X 独立——因为在三角形内 $P\{U=1\mid X=x\}=\dfrac{x/2}{x}=\dfrac12$ **与** x **无关。**

（Ⅲ） 由独立，$f_Z(z)=\dfrac12 f_X(z)+\dfrac12 f_X(z-1)$，$f_X(x)=2x\ (0<x<1)$：

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1 \\ z-1, & 1\le z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \qquad F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\le z<1 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{(z-1)^2}{2}, & 1\le z<2 \\ 1, & z\ge 2 \end{cases}$$

> **真题骨架**：🟧2016·22（均匀域 → 离散化 U → 判独立 → $Z=U+X$ 分布函数），仅区域/分界改为 $y=x/2$。

16. $f(x,y)=\dfrac{1}{x}\ (0<y<x<1)$ （$f_X=1$，$f_{Y|X}=1/x$）。

- $EX=\dfrac{1}{2},\ EX^2=\dfrac{1}{3},\ DX=\dfrac{1}{12}$；
- $f_Y(y)=-\ln y$，$EY=\dfrac{1}{4},\ EY^2=\dfrac{1}{9},\ DY=\dfrac{7}{144}$；
- $E(XY)=\displaystyle\int_0^1\int_0^x xy\cdot\frac{1}{x}\,dy\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{1}{6}$。

$$\mathrm{Cov}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24},\qquad \rho_{XY}=\frac{1/24}{\sqrt{1/12}\cdot\sqrt{7/144}}=\sqrt{\frac{3}{7}}\approx 0.655.$$

> **思路**：条件分布型先写 $f=f_Xf_{Y|X}$，再算三个期望。
> **常用积分**：$\displaystyle\int_0^1 t^n(-\ln t)\,dt=\frac{1}{(n+1)^2}$。

17.（Ⅰ）X_3 取 ±1，用全概率：

- $X_3=1$：$Y=X_1$，贡献 $P\{X_1\le x,\ X_1\le y\}=\Phi(\min\{x,y\})$；
- $X_3=-1$：$Y=X_2$，由独立贡献 $\Phi(x)\Phi(y)$。

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})+\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y).$$

（Ⅱ） $x\to+\infty$ 得 $F_Y(y)=\dfrac{1}{2}\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)$，故 **$Y\sim N(0,1)$ **。

> **真题骨架**：🟧2020·22（原题 $X_3\in\{0,1\}$，此处对称化为 ±1）。

18.（Ⅰ）极坐标 $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$：

$$1=c\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot r\,dr\,d\theta=c\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ c=\frac{3}{2\pi}.$$

（Ⅱ） 区域对称 + 密度偶 $\Longrightarrow EX=EY=0$，$E(XY)=0$，故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$。

（Ⅲ） $f_X(x)$ 不是 $f_X(x)f_Y(y)$ 的分解形式，$f(x,y)=c\sqrt{x^2+y^2}\neq f_Xf_Y$，故 X,Y **不独立**。

（Ⅳ） $0<z<1$：

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}\frac{3}{2\pi}r\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{z^{3/2}}{3}=z^{3/2}\ \Rightarrow\ f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{z}, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

> **真题骨架**：🟧2023·22（把原题 $f=c(x^2+y^2)$ 改为 $c\sqrt{x^2+y^2}$）。
> **技巧**：Z 是"到原点距离的函数" $\Longrightarrow$ **极坐标 + 面积法**，不必硬求 f_Z。

19.（Ⅰ）反解：由 $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{x+y}$ 得

$$x=uv,\qquad y=u(1-v).$$

雅可比行列式（注意是**反解** (x,y) 对 (u,v) 的行列式）：

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=v(-u)-u(1-v)=-uv-u+uv=-u.$$

故 $|J|=u$。取值区域：$x>0,y>0\Rightarrow u>0,\ 0<v<1$。于是

$$f_{UV}(u,v)=f\big(uv,\ u(1-v)\big)\cdot|J|=e^{-(uv+u(1-v))}\cdot u=u\,e^{-u},\quad u>0,\ 0<v<1.$$

（Ⅱ） 求边缘：

$$f_U(u)=\int_0^1 ue^{-u}\,\mathrm{d}v=ue^{-u}\ (u>0),\qquad f_V(v)=\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,\mathrm{d}u=1\ (0<v<1).$$

因 $f_{UV}(u,v)=f_U(u)f_V(v)$，故 U **与** V **相互独立**；且 $U\sim\Gamma(2,1)$（即参数为 1 的 $\chi^2(4)$），$V\sim U(0,1)$。

> **方法总结（雅可比三步）**：① 反解 $x=x(u,v),y=y(u,v)$；② 算 $|J|=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$；③ $f_{UV}=f\cdot|J|$，并把定义域一并变换。
> **真题骨架**：本题是"指数分布之和 + 比值"的经典结构，$\Gamma(2,1)$ 的分解结论也是**证明"泊松过程的到达时刻与均匀次序"** 的核心引理。

附 • 出题质量报告

考点覆盖（对照 ch17 的 11 道真题）

真题	考法	对应题	覆盖
2016·22	均匀分布+离散化 U +函数分布	**15**	✅
2017·22	混合型 $Z=X+Y$	**5 + 10**	✅
2018·22	$Z=XY$ +协方差	**9**	✅
2019·8	正态差 $\lvert X-Y\rvert$ 分布	**13**	◐ 部分
2019·22	$Z=XY$ +不相关+独立性	**9 + 11**	✅
2020·22	混合正态+证明	**17**	✅
2021·22	取点分段+商分布	**14 + 7**	✅
2022·10	条件分布求相关系数	**16**	✅
2023·22	圆形区域+Cov+独立+X^2+Y^2	**18**	✅
2024·9	条件均匀+协方差	**4 + 16**	✅
2025·22	复合分布+混合模型	**10 + 17**	◐ 部分

手法覆盖

和（5、10、15）、差（13）、积（9）、商（7）、最值（12）、平方和（18）、混合型（10、17）、离散化（15）、分布函数法（15、18）、卷积（5、9、10）、**雅可比变换（19，另 7/9/15 给出雅可比视角）**、极坐标（18）。

未覆盖方向（供二轮补）

1. 离散型二维函数分布（两离散变量之和的表格题）；
2. $\lvert X-Y\rvert$ 的正态差完整选择题（2019·8）；
3. 条件期望/全期望递推（留到数字特征章）；
4. 一般二维函数联合分布（如 $Y_1=2X_1$，$Y_2=\frac{1}{3}X_2$ ）——本题第 19 题已示范雅可比通法，可自行扩展；
5. 2025·22 保险赔付应用建模。