第3讲 · 向量：以题带点

这一讲在近十年真题里 **8 题、44 分**，平均每年 4.4 分，是全卷唯一必出解答题的地方（2019·20，11 分）也是它。

下面的顺序**按考分排，不按课本排。**每一条都从一个具体问题开始，讲完把方法凝成一句话，再用一两道题验证。看完一个点，就应当能独立重做那里的题。

本讲地图

序	点	真题锚点	分值	本点题量
1	基、坐标与过渡矩阵	2019·20（解答）	**11**	3
2	内积、正交与施密特	2021·6、2023·15	**10**	3
3	线性表示与交空间	2020·6、2023·7	**9**	3
4	线性相关性	2024·6	5	3
5	秩与极大无关组	2017·13	4	2
6	向量组等价	2022·7	5	2
7	抽象推理（证明）	支撑解答题	—	3

合起来 44 分，正好对上十年的账面。

一句话逻辑链（点的顺序被打乱，链条没断）：表示是把向量写成方程，相关是有没有多余材料，秩是材料真正的新方向数，等价是两组材料造出同一个空间，基与坐标是给系数起名字，正交是让每个方向互不干扰，交空间是两组材料共同造出的部分。被跳过的前置，各点开头会用一句「依赖」补上。

难度记号：★☆☆ 直接判定 · ★★☆ 含参或需变形 · ★★★ 证明与结构。

点 1 · 基、坐标与过渡矩阵

> 真题 2019·20（解答，11 分）｜重要度 ★★★｜题量 3
> 依赖：点 3 的「表示」与点 4 的「无关」。

这是本讲唯一出过大题的地方，也是唯一可能丢 11 分的地方。 它考的不是概念，而是一套固定动作：先把新基按列拼成矩阵，验证可逆；过渡矩阵就是这个矩阵；求坐标就解一个线性方程组。三个动作里出错最多的不是计算，是**方向反了**。

问题 1 · 验证基、写过渡矩阵、求坐标（★★☆）

> 【2019·20 骨架】设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，令
>
> $$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$
>
> （Ⅰ）验证它们是一组基；（Ⅱ）求从标准基到 α 基的过渡矩阵 C；（Ⅲ）求 $\beta=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在 α 基下的坐标。

怎么想：三个三维向量是不是基，只问它们是否无关。按列拼起来算行列式，非零即可。过渡矩阵按定义就是"新基用旧基表示时的系数矩阵"，旧基是标准基，所以这就是那三个向量本身按列排。求坐标不是把 C 乘上去，而是解方程 $Cx=\beta$。

解：（Ⅰ）按列拼成

$$C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad |C|=1\cdot(0-1)+1\cdot(1-0)=-2\neq 0.$$

可逆，故三向量无关，构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

（Ⅱ）旧基矩阵是单位阵 E，新基矩阵是 C，写 $V=UC$ 即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\,C,$$

逐列读出来正是 $\alpha_j=\sum_i c_{ij}\varepsilon_i$，与 C 的列一致。所以过渡矩阵就是 C 本身。

（Ⅲ）设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，展开

$$x_1+x_3=1,\qquad x_2+x_3=2,\qquad x_1+x_2=3.$$

前两式相加再减第三式得 $2x_3=0$，于是 $x_3=0,\ x_1=1,\ x_2=2$，坐标为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$。回代验算 $\alpha_1+2\alpha_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 成立。

带走的结论：**过渡矩阵的列 = 新基向量在旧基下的坐标。**所以"从标准基出发"时，过渡矩阵就是把新基按列排；这一步几乎不用算，直接用。

问题 2 · 双向换算坐标（★★☆）

> 沿用问题 1 的两组基。（Ⅰ）已知 γ 在 α 基下的坐标为 $(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$，求它在标准基下的坐标；（Ⅱ）求 $\delta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在 α 基下的坐标。

怎么想：两问是同一个关系的两个方向。手里有"新坐标"要回到"旧坐标"，是**乘**；手里有旧坐标要换成新坐标，是**解方程**。判据只有一条：代入后两边要相等。

解：（Ⅰ）按坐标加权：

$$\gamma=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=(2,0,2)^{\mathrm{T}}+(0,-1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,3,0)^{\mathrm{T}}=(5,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅱ）解 $Cx=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$：

$$x_1+x_3=1,\quad x_2+x_3=1,\quad x_1+x_2=1.$$

前两式相减得 $x_1 = x_2$，代入第三式得 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$，再由第一式得 $x_3 = \frac{1}{2}$，坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$。

带走的结论：坐标变换的方向由 $x_{\text{old}} = Cx_{\text{new}}$ 决定。乘 C 是从新到旧，解 Cx 是从旧到新。记住这一条，就不会在考场上把 C 和 C^{-1} 用反。

问题 3 • 反方向求过渡矩阵，为什么必可逆（★★★）

> 仍取问题 1 的 α 基。（Ⅰ）求从 α 基到标准基的过渡矩阵 C'；（Ⅱ）验证 $C' = C^{-1}$，并说明过渡矩阵为什么一定可逆。

怎么想：方向反过来，写 $V = UC'$ 时"旧基"已是 α 基、"新基"是标准基，即 $E = C\,C'$。所以 C' 只能是 C^{-1}。这不是巧合，是"两组基互相表示"的必然结果。

解：（Ⅰ）由 $E = C\,C'$ 得 $C' = C^{-1}$。由 $|C| = -2$，

$$C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）直接验证 $CC^{-1} = E$ 即可。可逆性的理由：基是一组无关且能张成全空间的向量，按列拼成的矩阵满秩，故行列式非零。若过渡矩阵不可逆，新基就会丢方向，张不满原来的空间，矛盾。

带走的结论：两个方向的过渡矩阵**互为逆矩阵**。考场上如果只求了一个方向，另一个方向可以用它反推检验；如果两个方向算出来不互逆，一定有一个错了。

> **本点定式**：旧基 U、新基 V，写 $V = UC$ 求 C；坐标满足 $x_{\text{old}} = Cx_{\text{new}}$，方向相反。验证基只算 $|C| \neq 0$。

点 2 • 内积、正交与施密特正交化

> 真题 2021·6（施密特，5 分）、2023·15（内积与线性组合，5 分）｜重要度 ★★★｜题量 3
> 依赖：点 4 的「无关」。

合计 10 分，是本讲第二块肉。更关键的是，**第 5 讲特征值里的"实对称矩阵正交对角化"要用它**，这一节学不牢，第 5 讲的 21 题就写不出。施密特的算法只有一句话：**每一步都减掉它在前面每个已得方向上的投影。**

问题 1 • 验证正交、求长度、算组合内积（★☆☆）

> 【2023·15 骨架】设
>
> $$\alpha = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \beta = (2, -2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \gamma = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}}.$$

> （Ⅰ）验证三者两两正交并求长度；（Ⅱ）判断单位化后是否为 $\mathbb{R}^3$ 的规范正交基；（Ⅲ）求 $\langle \alpha+2\beta,\ \gamma-\beta\rangle$ 。

怎么想：内积逐个算，为零即正交。第二问要用"两两正交的非零组必无关"这条结论，三个无关向量在三维里就是基。第三问**不要展开硬算**，用双线性拆开，正交项直接消掉。

解：（Ⅰ）

$$\langle \alpha,\beta\rangle = 2-4+2=0,\quad \langle \alpha,\gamma\rangle = 2+2-4=0,\quad \langle \beta,\gamma\rangle = 4-2-2=0.$$

三者长度都是 $\sqrt{1+4+4}=3$ 。

（Ⅱ）三个非零向量两两正交，故线性无关；三维空间中三个无关向量构成基，单位化后即为规范正交基。

（Ⅲ）用双线性展开，凡不同向量之间的内积都是零：

$$\langle \alpha+2\beta,\ \gamma-\beta\rangle = \langle \alpha,\gamma\rangle - \langle \alpha,\beta\rangle + 2\langle \beta,\gamma\rangle - 2\langle \beta,\beta\rangle = 0-0+0-2\cdot 9 = -18.$$

带走的结论：正交组的最大好处是**内积只留同项。**凡是题目给了正交条件又要求组合的内积，先拆开消项，比逐分量算快得多。

问题 2 • 两向量施密特（★☆☆）

> 设 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 。正交化、单位化。

怎么想：第一个方向原样保留；第二个减去它在第一个方向上的投影，投影系数是内积除以**长度平方。**

解：取 $u_1=\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 。则

$$u_2=\alpha_2-\frac{\langle \alpha_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=\left(\tfrac12,-\tfrac12,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

自检内积 $\frac12-\frac12=0$ 。长度分别为 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3/2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，单位化得

$$e_1=\frac{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2}},\qquad e_2=\frac{(1,-1,2)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{6}}.$$

带走的结论：**减投影时除长度平方，单位化时才除长度。**这两个分母混用是这一节最常见的失分点，写完后用"内积为零"自检一次就能抓住。

问题 3 • 三向量施密特（★★☆）

> 【2021·6 骨架】设 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ ，$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 。求正交组与规范正交组。

怎么想：前两步与问题 2 完全一样，第三步要**分别**减掉在 u_1 、u_2 上的两个投影。漏掉任何一个，第三个向量就不正交。

解：$\beta_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ ，$\beta_2=(\frac12,-\frac12,1)^{\mathrm{T}}$ 。先算两个系数：

$$\frac{\langle \alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle \beta_1,\beta_1\rangle}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\langle \alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle \beta_2,\beta_2\rangle}=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}.$$

于是

$$\beta_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}-\tfrac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}=\left(-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

验算 $\langle\beta_3,\beta_1\rangle=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$，$\langle\beta_3,\beta_2\rangle=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$。三个长度依次为 $\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{6}}{2}$、$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故

$$e_1=\frac{(1,1,0)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2}},\quad e_2=\frac{(1,-1,2)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{6}},\quad e_3=\frac{(-1,1,1)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{3}}.$$

带走的结论：第 k 步要减 $k-1$ 个投影。**用"前面每一个都得内积为零"逐项验算**，比回头检查算术更省时间。另外，若某一步得到零向量，说明原组本身相关，不能再往下除长度。

> **本点定式**：$u_k=\alpha_k-\sum_{i<k}\frac{\langle\alpha_k,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}u_i$；系数分母是长度平方。

点 3 • 线性表示与交空间

> 真题 2020·6（4 分）、2023·7（5 分）｜重要度 ★★★｜题量 3
> 依赖：点 5 的「秩」判据。

9 分，形态固定：**"能不能表示"就是"方程组有没有解"**。而交空间是它的双向版本——一个向量要同时被两组材料表示。同一个动作，做两次。

问题 1 • 判断能否表示，并说明唯一性（★☆☆）

> 设 $\beta=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。（Ⅰ）$\beta$ 能否由它们表示？表示法唯一吗？（Ⅱ）求出表示式。

怎么想：材料有三个、空间是三维，先看材料矩阵的行列式。可逆则既能表示又唯一，一步到位，不必再算增广矩阵的秩。

解：按列拼成 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1\cdot(1-0)+1\cdot(1-0)=2\neq 0.$$

满秩，故任意三维向量都能被唯一表示。设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，比较分量：

$$x_1+x_3=1,\qquad x_1+x_2=0,\qquad x_2+x_3=2.$$

由第二式 $x_2=-x_1$、第一式 $x_3=1-x_1$，代入第三式得 $1-2x_1=2$，故 $x_1=-\frac{1}{2}$、$x_2=\frac{1}{2}$、$x_3=\frac{3}{2}$，即

$$\beta=-\tfrac{1}{2}\alpha_1+\tfrac{1}{2}\alpha_2+\tfrac{3}{2}\alpha_3.$$

带走的结论："能否表示"看 $r(A)$ 与 $r(A,\beta)$ 是否相等；"是否唯一"看 $r(A)$ 是否等于向量个数。方阵时用行列式替代秩，能省一半计算。

问题 2 • 含参：什么参数下能表示（★★☆）

> 【2020·6 骨架】设 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,1,t)^{\mathrm{T}}$。（Ⅰ）求 t 使 β 可由 α_1,α_2 表示；（Ⅱ）当不能表示时，求 $r(\alpha_1,\alpha_2,\beta)$。

怎么想：两个材料张成三维空间里的一个平面，β 落在这个平面上时才能表示。**先用分量比较**把参数逼出来，再用行列式核验。

解：（Ⅰ）设 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，比较三个分量：

$$c_1=1,\qquad c_2=1,\qquad c_1+c_2=t.$$

前两式已经定死 $c_1=c_2=1$，故只有 $t=2$ 时相容，此时 $\beta=\alpha_1+\alpha_2$。

（Ⅱ）$t\neq 2$ 时前两个向量无关、秩为 2，而 β 不在它们的张成空间内，故秩升为 3。用行列式核验：

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&t\end{vmatrix}=t-2,$$

$t\neq 2$ 时非零，秩确为 3。

带走的结论：含参的表示问题，**分量比较往往比秩更快**，因为参数的约束通常直接出现在某一行方程里。但"不能表示时秩为几"要用行列式或秩定理说清，不能只凭感觉。

问题 3 • 交空间：同时被两组表示（★★★）

【2023·7 骨架】设

$$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2),\quad \alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$V_2=L(\beta_1,\beta_2),\quad \beta_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\ \beta_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求 $\dim V_1$、$\dim V_2$、$\dim(V_1+V_2)$；（Ⅱ）求 $V_1\cap V_2$ 的基；（Ⅲ）验证维数公式。

怎么想：交空间里的向量必须**两种表示同时成立**：$w=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$。移项就得到一个齐次方程组，解出系数后**代回去**才得到 w。注意系数解不能直接当基。

解：（Ⅰ）两组内部都不成比例，各为 2 维。把 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 按列拼成

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad |\cdot|=2\neq 0,$$

三个无关向量在 $\mathbb{R}^3$ 中，故和空间是 3 维。

（Ⅱ）比较分量得三个方程：

$$x_1=y_1,\qquad x_1+x_2=y_2,\qquad x_2=y_1+2y_2.$$

把前两式代入第三式：$x_2=x_1+2(x_1+x_2)$，即 $x_2=-3x_1$。令 $x_1=t$，代回得

$$w = t(\alpha_1 - 3\alpha_2) = t(1, -2, -3)^{\mathrm{T}}.$$

非零，故交空间是 1 维，基为 $(1,-2,-3)^{\mathrm{T}}$ 。核验它在第二组中的表示：$\beta_1 - 2\beta_2 = (1,-2,-3)^{\mathrm{T}}$ ，一致。

（Ⅲ）$3 = 2 + 2 - 1$ ，公式成立。

带走的结论：**交空间的解是"系数解"，不是"向量解"**。代回 $w = Ax$ 后还要去掉零向量与冗余向量，才能报基。若用平面法核验，两个平面的法向量叉积应与所求方向平行（本题得 $(-1,2,3)$ ，恰为反向，同一条直线）。

> **本点定式**：能表示 $\Longleftrightarrow$ $r(A) = r(A,\beta)$ ；唯一 $\Longleftrightarrow$ $r(A) = s$ 。交空间：解 $(A, -B)\binom{x}{y} = 0$ ，代回取 $w = Ax$ 。

点 4 • 线性相关性

> 真题 2024·6（5 分） | 重要度 ★★★ | 题量 3
> 依赖：无（这是本讲的地基）。

只有 5 分，但**它决定后面所有点的对错**：秩的定义、基的定义、证明题的每一步都在用它。判断只有一个动作：把向量按列拼成 A ，比较 $r(A)$ 与**向量个数**。

问题 1 • 具体向量组判相关并写出关系式（★☆☆）

> 【2024·6 骨架】设
>
> $$\alpha_1 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_2 = (2,3,1)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_3 = (1,0,5)^{\mathrm{T}}.$$
>
> （Ⅰ）判断相关性；（Ⅱ）若相关，写出一个具体的关系式。

怎么想：三个三维向量，先算行列式。非零则无关，为零则相关；相关时解 $Ax = 0$ 取一个非零解即可。

解：（Ⅰ）按列拼

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

沿第二行展开：$-1 \cdot (10-1) + 3 \cdot (5-2) = -9 + 9 = 0$ ，故线性相关。

（Ⅱ）解 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ ：

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + 3x_2 = 0, \qquad 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0.$$

第二式给 $x_1 = -3x_2$ ，第一式给 $x_3 = x_2$ ，代入第三式恒成立。取 $x_2 = 1$ 得

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

代回验算三个分量均为零。

带走的结论：**"相关"必须落到一个具体的关系式**，只写"因为行列式为零，所以相关"在解答题里只拿一半分。关系式就是 $Ax=0$ 的一个非零解，取自由变量为 1 最省事。

问题 2 · 变换后的向量组（★★☆）

> 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$、$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$、$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$；$\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2$、$\gamma_2=\alpha_2-\alpha_3$、$\gamma_3=\alpha_3-\alpha_1$。（Ⅰ）判断 β 组的相关性；（Ⅱ）求 γ 组的秩。

怎么想：原组无关时，新组的系数矩阵可以单独拿出来判。写 $B=AC$，则 $By=0 \iff Cy=0$，秩完全由 C 决定。**这一步的前提是原组无关**，不能不问就套。

解：（Ⅰ）

$$C_\beta=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad |C_\beta|=2\neq 0.$$

故 $C_\beta y=0$ 只有零解，β 组无关。

（Ⅱ）注意 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$ 恒成立，秩至多为 2。再看 γ_1,γ_2：若 $p\gamma_1+q\gamma_2=0$，展开整理得

$$p\alpha_1+(-p+q)\alpha_2-q\alpha_3=0.$$

原组无关，故 $p=0$ 且 $-p+q=0$，即 $p=q=0$。所以 γ_1,γ_2 无关，秩恰为 2。

带走的结论：**找出一条关系只能给出秩的上界，还要举出无关的部分给出下界**，两边夹住才算证完。β 组与 γ 组的差别就在一个系数矩阵可逆、一个不可逆。

问题 3 · 含参判相关（★★☆）

> 【2017·13 骨架】设 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,2,a)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,a^2)^{\mathrm{T}}$。（Ⅰ）求 a 使它们相关；（Ⅱ）对每个这样的 a 求秩。

怎么想：相关等价于行列式为零，算出关于 a 的多项式，逐个求根。**每个根都要单独代回算秩**，不能因为"相关所以秩小于 3"就笼统写"秩为 2"。

解：（Ⅰ）按列拼，第 2、3 列各减第 1 列，沿首行展开：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\1&a-1&a^2-1\end{vmatrix}=(a^2-1)-3(a-1)=(a-1)(a-2).$$

故 $a=1$ 或 $a=2$ 时相关。

（Ⅱ）两种情况秩都小于 3。又前两列前两行构成的子式

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

与 a 无关，故秩至少为 2。因此 $a=1$ 与 $a=2$ 时秩都等于 2。

带走的结论：含参行列式优先做**"列减列"造零再展开**，比直接展开快一倍。求出根后，用"某个与参数无关的子式非零"把秩的下界钉死，比逐一代入消元更稳。

> **本点定式**：无关 $\iff r(A)=s$ （比的是**向量个数**）；只有 $s=n$ 时才能用 $|A|$ 。

点 5 • 秩与极大无关组

> 真题 2017·13（4 分） | 重要度 ★★★ | 题量 2
> 依赖：点 4。

4 分，但它是全讲的工具：求秩的算法同时给出极大无关组，而极大无关组又反过来解释"为什么表示的系数不唯一"。

问题 1 • 三行四列求秩与极大无关组（★☆☆）

> 设
> $$\alpha_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,4,-2)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_4=(1,3,0)^{\mathrm{T}}.$$
> 求秩，求一个极大无关组，并把其余向量用它表示。

怎么想：按列拼，**只做行变换**，化到阶梯形，主元所在的**原矩阵列号**就是极大无关组。行变换等于左乘可逆矩阵，列之间的关系不变，所以可以在阶梯形上读系数，再回到原向量写答案。

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&1&3\\-1&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1,\,R_3+R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

两个非零行，秩为 2。主元在第 1、3 列，故取原向量 α_1,α_3 为极大无关组。化简后第 2 列是第 1 列的 2 倍，第 4 列是第 1、3 列之和，故

$$\alpha_2=2\alpha_1,\qquad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_3.$$

带走的结论：**极大无关组必须写原向量，不能写阶梯形里的列。**系数可以在阶梯形上读，向量必须回到原组取。另外，这里只能用行变换；列变换会改变"哪些列是主元列"这个信息。

问题 2 • 四维向量组，先观察再动笔（★★☆）

> 设
> $$\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$
> 求秩与一个极大无关组，并把不在其中的向量表示出来。

怎么想：先扫一眼有没有现成的关系。四个向量首尾相接、围成一个环，最后一个往往由前三个凑出。找到关系只说明秩不超过 3，还要证明前三个无关。

解：观察得

$$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,1,0)^{\mathrm{T}} + (0,0,1,1)^{\mathrm{T}} = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

故秩至多为 3。再证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关：设 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$，看第 1 分量得 $c_1 = 0$，第 2 分量得 $c_2 = 0$，第 3 分量得 $c_3 = 0$。故三者无关，秩恰为 3，它们构成极大无关组。

带走的结论：**能观察出来的关系比消元快十倍**，但观察只给上界；补一句"前 k 个无关"的证明（看分量逐个定零）才有下界。这两句话合起来才是一个完整的答案。

> **本点定式**：按列拼 → 只行变换 → 主元列号取原向量。秩 = 非零行数 = 极大无关组所含向量个数。

点 6 • 向量组等价

> 真题 2022·7（5 分）｜重要度 ★★☆｜题量 2
> 依赖：点 3、点 5。

5 分，全部出在选择题里。它唯一的坑是**把"矩阵等价"和"向量组等价"混为一谈**：前者只要同秩，后者还要求张成同一个空间。

问题 1 • 四个说法的辨析（★☆☆）

> 【2022·7 骨架】设 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $B: \beta_1, \cdots, \beta_t$ 是两个同维向量组。正确的是（　）。
> (A) 若 $r(A) = r(B)$，则 A 与 B 等价
> (B) 若 A 与 B 等价，则 $r(A) = r(B)$
> (C) 若 A 可由 B 表示，则 A 与 B 等价
> (D) 若 A 与 B 等价，则 $s = t$

怎么想：等价 = **互相**能表示。所以它是"双向"条件，任何单向条件都不够；反过来，双向必然给出同秩。用两个反例就能秒掉三个错误项。

解：答案 **B**。

(A) 错：$\{(1,0)^{\mathrm{T}}\}$ 与 $\{(0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 秩都是 1，却张开两条不同的直线。
(C) 错：单向不够，$\{e_1\}$ 能由 $\{e_1, e_2\}$ 表示，反向不能。
(D) 错：$\{e_1, e_2\}$ 与 $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ 等价，个数是 2 与 3。

带走的结论：判等价只认一条：**双向表示**，或者 $r(A) = r(B) = r(A, B)$。秩相等只是必要条件，选择题里几乎每次都拿它当干扰项。

问题 2 · 具体两组判等价（★★☆）

> 设 $A:\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；$B:\beta_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$。（Ⅰ）判断是否等价；（Ⅱ）再取 $C:\gamma_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $D:\delta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，说明"秩相等"是否为等价的充分条件。

怎么想：能看出 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$、$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$ 就直接双向反解，比求三个秩更快。第二问是构造反例。

解：（Ⅰ）

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\qquad \beta_2=\alpha_1-\alpha_2,$$

反解得

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2),\qquad \alpha_2=\tfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2).$$

互相能表示，两组等价。

（Ⅱ）γ_1 与 δ_1 分处两个不同坐标轴，不能互相表示，故不等价；但两者秩都是 1。所以秩相等**不是**等价的充分条件。

带走的结论：具体题目里，**先试着写出双向表示式**，这往往一步就完；只有当关系看不出来时，才退回去算 $r(A,B)$。反过来，构造反例要选"秩相同但方向不同"的最简例子，一维两个坐标轴就是标准模板。

> **本点定式**：A 与 B 等价 $\iff r(A)=r(B)=r(A,B)$。向量个数可以不同，秩相同不充分。

点 7 · 抽象推理：证明题的三个套路

> 不直接命题，但 2019·20 那类解答题的第二问全靠它 | 重要度 ★★☆ | 题量 3

这三道题看着花样不同，其实只有两个动作：**假设线性组合为零，然后比较系数**；以及**在相关关系里找出那个非零系数，才允许除。**

问题 1 · 替换定理（★★★）

> 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，且 $k_1k_2k_3\neq 0$。证明：（Ⅰ）β,α_2,α_3 线性无关；（Ⅱ）把任一 α_i 换成 β 后仍无关。

怎么想：证无关的标准起手式——设组合为零，代入 β 的表达式，按 α 合并，用原组无关把每个系数逼成零。**关键是哪一步能推出 $c=0$ 这个结论**，靠的是被替换位置那个系数 $k_i\neq 0$。

解：（Ⅰ）设 $c\beta+d\alpha_2+e\alpha_3=0$，代入得

$$ck_1\alpha_1+(ck_2+d)\alpha_2+(ck_3+e)\alpha_3=0.$$

原组无关，故 $ck_1=0$、$ck_2+d=0$、$ck_3+e=0$。由 $k_1\neq 0$ 得 $c=0$，再得 $d=e=0$。

（Ⅱ）换成替换 α_i 时，展开后 α_i 的系数是 ck_i 。由于 $k_i \neq 0$ ，同样先得 $c=0$ ，其余系数随之全为零。被替换位置对应的系数非零，就是这个证明的全部要害。

带走的结论：证明"仍然无关"只有一条路：**假设为零 → 代入 → 用原组无关 → 逐个系数为零**。写答案时务必点明"因为 $k_i \neq 0$ 才能除"，这一句就是采分点。

问题 2 • 相关与无关的接力（★★★）

> 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关。证明：（Ⅰ）α_1 可由 α_2, α_3 表示；（Ⅱ）α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示。

怎么想：相关给出一条关系，但**不能直接除**，必须先证明想除的那个系数非零。这一步正是第二组"无关"起作用的地方。第二问用反证：若能表示，就会破坏第二组的无关性。

解：（Ⅰ）由相关，存在不全为零的 c_1, c_2, c_3 使 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ 。第二组无关，故其中 α_2, α_3 无关。若 $c_1 = 0$ ，则 $c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ 迫使 $c_2 = c_3 = 0$ ，与"不全为零"矛盾。所以 $c_1 \neq 0$ ，可解出

$$\alpha_1 = -\frac{c_2}{c_1}\alpha_2 - \frac{c_3}{c_1}\alpha_3.$$

（Ⅱ）若 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示，把（Ⅰ）的式子代入，就消去了 α_1 ，于是 α_4 能由 α_2, α_3 表示，这与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 无关矛盾。

带走的结论：**相关关系里，系数非零是要证的，不是能假设的。**凡是要"除以某个系数"，前面必须有一段"它不能为零，否则……矛盾"。这是本讲证明题最容易被扣分的地方。

问题 3 • 用内积证秩（★★★）

> 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵。证明：（Ⅰ）$Ax = 0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ 同解，从而 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$ ；（Ⅱ）A 的列向量组线性无关 $\iff$ $A^{\mathrm{T}}A$ 可逆。

怎么想：一个方向是"左乘 A^{T} "，另一个方向要**左乘 x^{T} 凑成平方和**。为什么必须是实矩阵？因为平方和为零才能推出每个分量为零——这正是"实"字的作用。

解：（Ⅰ）若 $Ax = 0$ ，左乘 A^{T} 得 $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ 。反之若 $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$ ，左乘 x^{T} ：

$$0 = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = \sum_i (Ax)_i^2.$$

实数的平方和非负且和为零，故每个 $(Ax)_i = 0$ ，即 $Ax = 0$ 。两组同解，未知量个数同为 n ，由解空间维数公式 $n - r(A) = n - r(A^{\mathrm{T}}A)$ ，得 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$ 。

（Ⅱ）A 的列无关 $\iff$ $r(A) = n$ $\iff$ $r(A^{\mathrm{T}}A) = n$ 。而 $A^{\mathrm{T}}A$ 是 n 阶方阵，满秩即等价于可逆。

带走的结论：**"实矩阵"三个字是解题钥匙**，看到 $A^{\mathrm{T}}A$ 就要想到 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = \|Ax\|^2$ 这个范式。这条结论在第 6 讲二次型里还会以"$A^{\mathrm{T}}A$ 正定"的形式再出现一次。

> **本点定式**：证无关 → 设零组合 → 靠某个系数非零逼出全部为零；证同解 → 双向代入，有一边要用平方和。

本讲速查卡

问什么	用什么
能否表示	$r(A)=r(A,\beta)$
表示唯一	$r(A)=s$ （s 为向量个数）
相关还是无关	$r(A)<s$ 相关；$r(A)=s$ 无关；方阵可用 $\lvert A\rvert$
求秩与极大无关组	按列拼，只行变换，主元列号取原向量
两组是否等价	$r(A)=r(B)=r(A,B)$
过渡矩阵	$V=UC$，C 的列是新基在旧基下的坐标
坐标换算	$x_{\text{old}}=Cx_{\text{new}}$ （方向与基变换相反）
施密特	$u_k=\alpha_k-\sum_{i<k}\dfrac{\langle\alpha_k,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}u_i$
交空间	解 $(A,-B)\binom{x}{y}=0$，代回 $w=Ax$ 后去零去冗
维数公式	$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

三处最容易丢分

1. **过渡矩阵方向反了**：写成 $x_{\text{new}}=Cx_{\text{old}}$。这是 2019·20 的最大陷阱，写完用"代入后两边相等"验一次。
2. **极大无关组写成阶梯形的列**：系数可以在化简后的矩阵上读，但答案必须写回原向量。
3. **交空间把系数解当基**：解出来的是 x,y，还要代回 $w=Ax$，并删掉零向量与冗余向量。

参考 `参考仓库/Math/linear-algebra/knowledge/3-vector/vector.tex` 与 `exercise/3-vector/vector.tex`。题面数据均为另设，年份标注只用于定位真题骨架与考法。旧版「考点 / 试题 / 解析」三件套已归档在 `旧版-题点分离/`。