线性代数 第4讲 · 线性方程组 · 试题

> **用法**：先过 01-考点手册，再限时 95 分钟做本卷，最后对 03-解析。
> **来源记号**：🟧 真题库第 12 章 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。标「真题骨架」的题与真题**同结构、数字全部原创。**
> **难度**：A ★☆☆ · B ★★☆ · C ★★★。

A 组 · 基础（直接套用，★☆☆）

1. 【克拉默法则】用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

2. 【齐次基础解系】求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并写出通解。

3. 【非齐次通解】求方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

的通解。

4. 【解的性质 · 选择】设 η_1, η_2 是 $Ax = b\ (b \neq 0)$ 的解，ξ 是 $Ax = 0$ 的解。则下列向量中**一定**是 $Ax = b$ 的解的是（ ）。

（A）$\eta_1 + \eta_2$　　（B）$\eta_1 - \eta_2$　　（C）$\eta_1 + \xi$　　（D）$2\eta_1$

5. 【解的个数】设 A 为 4×5 矩阵，$r(A) = 3$ 。

（Ⅰ）$Ax = 0$ 的基础解系含有几个向量?

（Ⅱ）若 $Ax = b$ 有解，其通解中含有几个任意常数?

（Ⅲ）$Ax = b$ 能否有唯一解？说明理由。

6. 【几何意义】判断下列三个平面的位置关系，并说明依据：

$$\pi_1: x+y+z=1, \qquad \pi_2: x-y+z=1, \qquad \pi_3: 2x+2z=2.$$

B 组 · 中等（含参、同解、几何，★★☆）

7. 【基础解系与通解 🟧2019·13 骨架】求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩、一个基础解系与通解。

8. 【同解求参数 🟧2022·6 / 2025·15 骨架】设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&3&5\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 a 的值，使 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解；

（Ⅱ）设 $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&b\end{pmatrix}$，求 b 的值，使 $Ax=0$ 与 $Cx=0$ 同解。

9. 【含参讨论】设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

讨论 a 取何值时，方程组 $Ax=b$ **无解**、有**唯一解**、有**无穷多解**。

10. 【三平面位置关系 🟧2024·5 / 2025·6 骨架】设三个平面

$$\pi_i:\ a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i\quad (i=1,2,3),$$

系数矩阵为 A，增广矩阵为 (A,b)。

（Ⅰ）若 $r(A)=r(A,b)=2$，则三平面的位置关系是（ ）。

(A) 交于一点　(B) 交于一条直线　(C) 两两相交但无公共点　(D) 相互平行且不重合

（Ⅱ）若 $r(A)=2$，$r(A,b)=3$，则三平面的位置关系是（ ）。

(A) 交于一点　(B) 交于一条直线　(C) 两两相交但无公共点　(D) 三个平面完全重合

11. 【解的结构 · 构造通解】设 A 为 3×3 矩阵，$r(A)=1$，且

$$\eta_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$$

都是 $Ax=b$ 的解。求 $Ax=b$ 的通解。

12. 【公共解】设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

求 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的**全部公共解。**

13. 【$n-r=1$ 的经典结构】设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵满足 $r(A)=3$，且 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，其中

$$\eta_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\qquad \eta_2+\eta_3=(4,6,8,10)^{\mathrm{T}}.$$

求 $Ax=b$ 的通解。

14. 【矩阵方程 🟧2016·20 骨架】设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）判断矩阵方程 $AX=B$ 是否有解，并说明理由；

（Ⅱ）若把 B 换成 $B_0=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$，求 $AX=B_0$ 的通解。

C 组 · 拔高（证明与结构，★★★）

15. 【解的性质证明】设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 都是 $Ax = b\ (b \neq 0)$ 的解。证明：$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$ 是 $Ax = b$ 的解的充要条件是

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1.$$

16. 【三棱柱的参数条件】设

$$\pi_1: x+y+z=1, \qquad \pi_2: x+2y+3z=2, \qquad \pi_3: x+4y+az=b.$$

（Ⅰ）求 a, b 满足的条件，使三个平面**两两相交但没有公共点**（构成"三棱柱"）；

（Ⅱ）$a=7$ 且 $b=3$ 时，三个平面的位置关系是什么？

17. 【同解判据的证明】设 A, B 是同列数的实矩阵。证明：

$$Ax = 0 \text{ 与 } Bx = 0 \text{ 同解} \iff r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

18. 【解的线性无关性】设 η_0 是 $Ax=b\,(b\neq 0)$ 的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系（$r=r(A)$）。证明：

$$\eta_0,\ \eta_0+\xi_1,\ \eta_0+\xi_2,\ \cdots,\ \eta_0+\xi_{n-r}$$

线性无关。

> **做完对答案** → 03-解析。