线性代数 第4讲 · 线性方程组 · 解析

> 对应 02-试题。每题给「**答案 / 思路 / 易错点 / 真题骨架**」。

核心三句

$$Ax=b \text{ 有解} \iff r(A)=r(A,b);\qquad \text{唯一} \iff \text{同}=n;\qquad \text{通解}=\text{特解}+\text{齐次通解}.$$

A 组 · 基础

第 1 题

答案：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$。

思路：系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=1(1-2)-1(-2-1)+1(4+1)=-1+3+5=7\neq 0,$$

故有唯一解，可用克拉默法则。逐个替换列：

$$|A_1|=\begin{vmatrix}6&1&1\\3&-1&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=7,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&3&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=14,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&-1&3\\1&2&2\end{vmatrix}=21.$$

于是

$$x_1=\frac{7}{7}=1,\qquad x_2=\frac{14}{7}=2,\qquad x_3=\frac{21}{7}=3.$$

验算：$1+2+3=6$；$2-2+3=3$；$1+4-3=2$ ✓。

易错点：

1. $|A_j|$ 是替换**第 j 列**，不是第 j 行；
2. 三阶行列式展开时符号交错（$+-+$），最容易在中间项出错；
3. 克拉默法则要求 $|A|\neq 0$ **先验证**，不能直接套。

第 2 题

答案：基础解系 $\xi_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$；通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$。

思路：$r(A)=2$（两行不成比例），$n=4$，故基础解系含 $4-2=2$ 个向量。

行变换：第二行减第一行得 $(0,1,2,3)$，即

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\qquad x_2+2x_3+3x_4=0.$$

取 x_3,x_4 为自由未知量：$x_2=-2x_3-3x_4$，$x_1=-x_2-x_3-x_4=x_3+2x_4$。

- $x_3=1,\ x_4=0$：$x_2=-2$，$x_1=1\to\xi_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；
- $x_3=0,\ x_4=1$：$x_2=-3$，$x_1=2\to\xi_2=(2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$。

验算：ξ_1 代入两式：$1-2+1+0=0$，$1-4+3+0=0$ ✓。

易错点：

1. 基础解系**个数**先算清：$n-r=2$，写成 1 个或 3 个都错；
2. 自由未知量要**依次取单位向量**，不能随意赋值得出两个线性相关的解；
3. 回代时 x_1 的表达式符号容易错（是 x_3+2x_4，不是 $-x_3-2x_4$）。

第 3 题

答案：通解

$$x=(4,0,-1)^{\mathrm{T}}+k(-3,1,2)^{\mathrm{T}}\qquad(k\text{ 任意}).$$

思路：$r(A)=2$（两行不成比例），$n=3$，故 $n-r=1$，一个参数。

求特解：令自由未知量 $x_2=0$，回代得

$$x_1+x_3=3,\qquad x_1+2x_3=2\Longrightarrow x_3=-1,\ x_1=4.$$

故 $\eta^*=(4,0,-1)^{\mathrm{T}}$。

求齐次基础解系：对应齐次方程组 $x_1+x_2+x_3=0$、$x_1-x_2+2x_3=0$，取 $x_2=1$，得

$$x_1+x_3=-1,\qquad x_1+2x_3=1\Longrightarrow x_3=2,\ x_1=-3.$$

故 $\xi=(-3,1,2)^{\mathrm{T}}$。

验算：$(4,0,-1)+k(-3,1,2)$ 代入第一式：$(4-3k)+k+(-1+2k)=3$ ✓。

易错点：

1. **特解与基础解系要分开算**，不能用同一个 "参数取值" 混着来；
2. 齐次部分不能沿用非齐次的常数项（常有人把 3、2 带进去）；
3. 通解里的任意常数只能有一个（$n-r=1$）。

第 4 题

答案：**C**。

思路：逐个用 A 作用：

- (A) $A(\eta_1+\eta_2)=b+b=2b\neq b$，✗；
- (B) $A(\eta_1-\eta_2)=b-b=0$，是**齐次**的解，✗；
- (C) $A(\eta_1+\xi)=b+0=b$，✓；
- (D) $A(2\eta_1)=2b\neq b$，✗。

易错点：**"解 + 齐次解仍是解"** 与 **"解 + 解不是解"** 必须分清。判据是系数和：系数和为 1 才是非齐次解。

第 5 题

答案：（Ⅰ）2 个；（Ⅱ）2 个；（Ⅲ）**不能**有唯一解。

思路：$n=5$（未知量个数看**列数**），$r(A)=3$。

（Ⅰ）基础解系个数 $=n-r=5-3=2$。

（Ⅱ）通解 = 特解 + 齐次通解，故任意常数个数也是 $n-r=2$。

（Ⅲ）唯一解要求 $r(A)=r(A,b)=n=5$，但 $r(A)=3<5$，故**不可能**有唯一解。若 $Ax=b$ 有解，只能有无穷多解（2 个参数）。

易错点：

1. 把 n 当成行数 4 ——n **永远是列数（未知量个数）**；
2. 认为 4×5 的矩阵"未知量是 4 个"；
3. 忽略 $r(A)=3<5$ 就已经否定了唯一解。

第 6 题

答案：三个平面**交于一条直线**。

思路：写出增广矩阵并作行变换：

$$(A\mid b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\2&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $r(A)=r(A,b)=2<3=n$，方程组有无穷多解（1 个自由未知量），几何上是**一条直线**。

几何解释：第三个方程恰好是前两个方程之和（$r_3=r_1+r_2$），所以 π_3 通过 π_1 与 π_2 的交线；而 π_1,π_2 的法向量 $(1,1,1)$ 与 $(1,-1,1)$ 不平行，交出一条直线。三平面共用这条直线。

易错点：

1. 只看"三个方程"就以为 $r=3$，必须先作行变换；
2. $r(A)=r(A,b)=2$ 是"交于直线"，**不是**"交于一点"（后者要 $r=3$）；
3. 第三个平面**不**与另两个平行（法向量 $(2,0,2)$ 与另两个都不成比例），所以不是"平行"型。

B 组 • 中等

第 7 题

答案：$r(A)=2$；基础解系 $\xi_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$；通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$。

思路：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

（第三行本来就是前两行之和，属于**冗余方程**。）故 $r(A)=2$，$n-r=2$。

对应方程组：$x_1+x_2+x_4=0$，$x_2+x_3=0$。取 x_3,x_4 自由：

- $x_3=1,x_4=0$：$x_2=-1$，$x_1=-x_2-x_4=1\to\xi_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$；
- $x_3=0,x_4=1$：$x_2=0$，$x_1=-1\to\xi_2=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$。

验算：ξ_1 代入第一式 $1-1+0+0=0$ ✓，第二式 $-1+1=0$ ✓。

易错点：

1. **不要把 $r(A)$ 数成 3**——第三个方程是冗余的，这正是本题的"陷阱"；
2. 若先化到最简形（把第一行减去第二行）会更顺：$x_1-x_3+x_4=0$，一眼看出自由变量是 x_3,x_4；
3. 基础解系可以取任意一组基，你算出的向量与答案不同但**张成同一空间**也算对（考试会给等价形式）。

第 8 题

答案：（Ⅰ）$a=1$；（Ⅱ）$b=4$。

思路：$Ax=0$ 的解空间是 $k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$（$r(A)=2$，$n-r=1$）。**同解 $\Leftrightarrow$ B 的每一行都能被 A 的行线性表示**（且秩相同）。

（Ⅰ）设 $(a,3,5)=c_1(1,1,1)+c_2(1,2,3)$，则

$$c_1+c_2=a,\qquad c_1+2c_2=3,\qquad c_1+3c_2=5.$$

由后两式 $c_2=2$，$c_1=-1$，故 $a=c_1+c_2=1$。

验算（换一条路）：A 的解 $(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 代入 $(a,3,5)x=0$ 得 $a-6+5=0$，即 $a=1$ ✓——两条路一致。

（Ⅱ）同理设 $(2,3,b)=c_1(1,1,1)+c_2(1,2,3)$：$c_1+c_2=2$，$c_1+2c_2=3$ 得 $c_2=1$，$c_1=1$，故

$$b=c_1+3c_2=4.$$

验算：$(2,3,4)=(1,1,1)+(1,2,3)$ ✓。

易错点：

1. 只算 B 的秩等于 2 远远不够——秩相同只说明解空间维数相同，还必须**解相同**；
2. 用"解代入"验算是最快的检查办法，务必用上；
3. c_1, c_2 解出来后**别忘了** $a = c_1 + c_2$ **这一项**（第一分量），有人直接把 c_2 当答案。

第 9 题

答案：

- $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$： **唯一解**；
- $a = 1$： **无穷多解**（2 个参数）；
- $a = -2$： **无解。**

思路：先算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2).$$

（展开：$2(a-1) + a(1-a^2)$ 整理即得。）

① 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时：$|A| \neq 0$，由克拉默法则，**唯一解。**

② 当 $a = 1$ 时：A 全为 1 的矩阵，$b = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 。

$$r(A) = 1, \qquad r(A,b) = 1,$$

故有无穷多解，参数个数 $n - r = 3 - 1 = 2$ 。方程组即 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 。

③ 当 $a = -2$ 时：

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

三行相加得 $(0,0,0 \mid 3)$，即 $0 = 3$，故**无解。**等价地：$r(A) = 2$ （三行之和为 0 但不全成比例），$r(A,b) = 3$，$r(A) < r(A,b)$ 。

易错点：

1. $|A| = 0$ **有两个根**（$a = 1$ 与 $a = -2$，其中 $a = 1$ 是二重根），必须**分开讨论**——只讨论 $a = 1$ 会漏掉 $a = -2$ 的无解情形；
2. 行列式符号：本题是 $-(a-1)^2(a+2)$，写成 $(a-1)^2(a+2)$ 会把两个根判反（根不变，但代入时正负号会乱）；
3. 无解的判据是 $r(A) < r(A,b)$，**不是** $|A| = 0$ 这一条（$a = 1$ 时 $|A| = 0$ 却有解）。

第 10 题

答案：（Ⅰ）**B**；（Ⅱ）**C。**

思路：

（Ⅰ）$r(A)=2$ 说明三个法向量共面（都垂直于同一个方向），三平面都**平行于同一条直线**；$r(A,b)=2$ 说明**有解**，即存在公共点。两者合起来：公共部分是"一个方向的一整条直线"→ **交于一条直线。**

（Ⅱ）$r(A)=2$ 仍表示三平面平行于同一条直线；但 $r(A,b)=3>r(A)$ 说明**无解**，即没有公共点。既平行于同一方向又无公共点 → 三条交线互相平行、错开，整体像**三棱柱**（每两个平面都相交，但没有三者共点）→ **两两相交但无公共点。**

易错点：

1. 看到"无解"就选"平行"——本题三个法向量**两两不平行**，平面并不平行，只是**没有公共点**；
2. 记住判别口诀：$r(A)$ **管方向（法向量独立程度），** $r(A,b)$ **管有没有公共点**；
3. $r(A)=2, r(A,b)=3$ 是"三棱柱"，$r(A)=1, r(A,b)=2$ 才是"平行平面"型——两者都是无解，但几何完全不同。

第 11 题

答案：

$$x=(1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,-2)^{\mathrm{T}}\qquad (k_1,k_2\text{ 任意}).$$

思路：$n=3$，$r(A)=1$，故齐次解空间维数 $=3-1=2$，通解需**两个**齐次解。

由"两解之差是齐次解"：

$$\eta_1-\eta_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}-(2,0,1)^{\mathrm{T}}=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\eta_1-\eta_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}-(1,2,3)^{\mathrm{T}}=(0,-1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

两者**不成比例**（检验：$(-1,1,0)$ 的第二分量与第一分量之比为 -1，而 $(0,-1,-2)$ 的第一分量为 0），故线性无关，可作齐次基础解系。

通解 $=\eta_1+k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_1-\eta_3)$。

易错点：

1. **必须先确认两个差向量线性无关**——若三个解恰好共线，差向量可能只张成 1 维，此时需要另找解；
2. 参数个数由 $n-r=2$ 决定，**不能**因为给了 3 个解就写 3 个参数；
3. 特解可以取 η_1,η_2,η_3 中任意一个，答案形式不唯一但解集相同。

第 12 题

答案：全部公共解为 $k(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ (k 任意)。

思路：公共解就是**拼接方程组**的解：

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

先解 $Ax = 0$：两行相加得 $2x_1 + 2x_3 = 0$，相减得 $2x_2 + 2x_4 = 0$，故

$$x_1 = -x_3, \qquad x_2 = -x_4.$$

通解 $x = s(-1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} + t(0, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$。

再代入 $Bx = 0$，即 $x_1 + x_2 = 0$：

$$-s - t = 0 \Longrightarrow t = -s.$$

回代得

$$x = s(-1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} - s(0, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}} = s(-1, 1, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

验算：$(-1, 1, 1, -1)$ 代入 A 的两行：$-1 + 1 + 1 - 1 = 0$ ✓，$-1 - 1 + 1 + 1 = 0$ ✓；代入 B：$-1 + 1 = 0$ ✓。

易错点：

1. 公共解**不是**"两个通解取交集"这么简单，必须先求出一个通解再代入另一个方程；
2. 拼接时用**上下拼**（同解判据、公共解都是上下），不是左右拼；
3. 最后要检查求出的解集维数：本题 $r = 3$，$n - r = 1$，正好 1 个参数。

第 13 题

答案：

$$x = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}} + k(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}} \qquad (k \text{ 任意}).$$

思路：$n = 4$，$r(A) = 3$，故齐次解空间维数 $= 4 - 3 = 1$，**只需一个**齐次解。

关键观察：$\eta_2 + \eta_3$ 给的是**两个解之和**，而

$$A\left(\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}\right) = \frac{b + b}{2} = b,$$

所以 $\dfrac{\eta_2 + \eta_3}{2} = (2, 3, 4, 5)^{\mathrm{T}}$ **也是一个解**。于是

$$\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} - \eta_1 = (2, 3, 4, 5)^{\mathrm{T}} - (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}} = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

是齐次解，且非零，正好构成基础解系。

易错点：

1. **不能**把 $\eta_2 + \eta_3$ 直接当解（它是 $2b$）；要么除以 2，要么直接用 $\eta_2 + \eta_3 - 2\eta_1 = 2(1, 1, 1, 1)$ 当齐次解——**倍数不影响方向**；
2. 参数只有 1 个（$n - r = 1$），写成 2 个就错；
3. 若题目给的是 $\eta_2 - \eta_3$ 这种"差"，那就**直接**是齐次解，不用再减 η_1。读题时看清给的是和还是差。

第 14 题

答案：（Ⅰ）**无解**；（Ⅱ）$X=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$（$t$ 任意）。

思路：

（Ⅰ）A 的两列成比例，$r(A)=1$。增广矩阵

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

故 $r(A,B)=2>r(A)=1$，**无解。**

也可按列看：B 的第一列 $(1,3)^{\mathrm{T}}$ 不能被 A 的列 $(1,2)^{\mathrm{T}}$ 表示（否则 $2\times1=3$ 矛盾），所以整体的矩阵方程无解。

（Ⅱ）$B_0=(1,2)^{\mathrm{T}}$ 恰好 $=1\cdot(1,2)^{\mathrm{T}}$，故 $r(A,B_0)=1=r(A)$，有无穷多解。方程组为

$$x_1+2x_2=1\Longrightarrow x_1=1-2x_2.$$

取 $x_2=t$，得

$$X=\begin{pmatrix}1-2t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

易错点：

1. $AX=B$ 有解要求**每一列**都能表示，一列不行就整体无解（不能"部分列有解"就算有解）；
2. X 是**矩阵**（本题为 2×1），不是数，别把通解写成一个标量；
3. 判据是 $r(A)=r(A,B)$，其中 (A,B) 是**左右拼接**。

C 组 • 拔高

第 15 题

答案：见证明。

思路：记 $k=k_1+\cdots+k_s$。由线性性

$$A(k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+\cdots+k_sA\eta_s=(k_1+\cdots+k_s)b=kb.$$

充分性：若 $k=1$，则上式 $=b$，即为 $Ax=b$ 的解。

必要性：若 $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 是 $Ax=b$ 的解，则 $kb=b$。因 $b\neq0$，故 $k=1$。

易错点：

1. 必要性必须用 $b\neq0$ **这个条件** ——若 $b=0$ 则任何系数和都成立（都是齐次解），题目给 $b\neq0$ 正是为了这一步；
2. 整个证明的关键是：用 A 作用后只剩系数和乘 b，把这个式子写清楚即可；
3. 推论要会：**系数和为 0 $\Longrightarrow$ 齐次解；系数和为 1 $\Longrightarrow$ 非齐次解。**

第 16 题

答案：（Ⅰ）$a=7$ 且 $b\neq 3$；（Ⅱ）交于一条直线。

思路：

（Ⅰ）"两两相交但无公共点"的代数刻画是

$$r(A)=2 \quad \text{且} \quad r(A,b)=3.$$

先求 $r(A)=2$ 的条件：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&a\end{vmatrix}=1(2a-12)-1(a-3)+1(4-2)=a-7.$$

故需 $a=7$。此时

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&7\end{pmatrix},\qquad r(A)=2$$

（第一、二行无关，第三行 $=2\times$ 第二行 $-$ 第一行）。

再看 $r(A,b)$：作行变换

$$(A\mid b)\xrightarrow{r_2-r_1,\,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&3&6&b-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&0&b-4\end{pmatrix}.$$

故 $r(A,b)=3\iff b-4\neq 0\iff b\neq 3$。

结论：$a=7$ 且 $b\neq 3$ 时构成三棱柱：三个法向量共面（$r(A)=2$，三平面平行于同一方向），但无公共点（$r(A,b)=3$）。

（Ⅱ）$a=7$、$b=3$ 时 $r(A)=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多解（1 个参数），三平面**交于一条直线**（且这条直线方向就是 A 的零空间方向）。

> **补充**：$a\neq 7$ 时 $|A|\neq 0$，三平面必交于一点（唯一解）；所以"三棱柱"只可能发生在 $a=7$ 这条退化线上。

易错点：

1. 只算 $r(A)=2$ 就下结论——**还必须**保证 $r(A,b)=3$（有解就是"交于直线"，不是三棱柱）；
2. 行变换时 b 那一列要跟着变，r_3-3r_2 后常数项变成 $b-1-3=b-4$；
3. $a=7$ 时第三行 $=2\times$ 第二行 $-$ 第一行，这个关系可用来**验算** $|A|=0$。

第 17 题

答案：见证明。

思路：记 $S_A=\{x\mid Ax=0\}$，$S_B=\{x\mid Bx=0\}$，n 为列数。

（$E\Rightarrow C$） 设 $S_A=S_B$。拼接方程组 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的解集是 $S_A\cap S_B=S_A$，故

$$\dim S_A=\dim(S_A\cap S_B)\Longrightarrow n-r(A)=n-r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\Longrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}.$$

同理（交换 A,B）$r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$。故三者相等。

（$C\Rightarrow E$） 设 $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r$。则

$$\dim S_A=\dim S_B=\dim\left(S_A\cap S_B\right)=n-r.$$

而 $S_A\cap S_B\subseteq S_A$，两个子空间**维数相同**，故 $S_A\cap S_B=S_A$。同理 $S_A\cap S_B=S_B$。于是 $S_A=S_B$，即两方程组同解。

易错点：

1. 必须说清"**拼接方程组的解集 = 两个解集的交**"，这是整个证明的支点；
2. 由"维数相同 + 包含关系"推"相等"时，要**明确写出包含方向**（$S_A\cap S_B\subseteq S_A$）；
3. 拼接是**上下拼**；写成左右拼 (A,B) 是另一个东西（那是 $AX=B$ 的判据）。

第 18 题

答案：见证明。

思路：设有数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-r}$ 使

$$c_0\eta_0+c_1(\eta_0+\xi_1)+\cdots+c_{n-r}(\eta_0+\xi_{n-r})=0.$$

按 η_0 与 ξ_i 合并：

$$\Big(c_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\Big)\eta_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\xi_i=0.$$

两边左乘 A，并注意 $A\eta_0=b$、$A\xi_i=0$：

$$\Big(c_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\Big)b=0.$$

因 $b\neq0$，故

$$c_0+\sum_{i=1}^{n-r}c_i=0.$$

代回前一式得 $\sum c_i\xi_i=0$。因 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，故 $c_1=\cdots=c_{n-r}=0$，再由上式 $c_0=0$。

所以这些向量线性无关。

易错点：

1. **必须用上 $b\neq0$ 这个条件**，才能从 $\left(c_0+\sum c_i\right)b=0$ 推出系数和为 0；

2. 顺序不能反：先作用 A 得到系数和，再回代用 ξ_i 的无关性，最后得 c_0；
3. 结论的含义值得记住：**"一个特解 + 逐个加齐次基向量"总能得到 $n-r+1$ 个线性无关的解**——这是构造"线性无关解组"的标准手法。

命题质量报告

一、考点覆盖表

考点	题号	真题骨架
克拉默法则	1	—
齐次基础解系与通解	2、7	🟧2019·13
非齐次通解（特解 + 齐次）	3	—
解的性质（系数和）	4、15	—
解的个数与 $n-r$	5	—
三平面几何意义	6、10、16	🟧2019·6 / 2024·5 / 2025·6
同解求参数	8	🟧2022·6 / 2025·15
含参讨论三种情形	9	—
由解构造通解	11、13	—
公共解	12	—
矩阵方程 $AX=B$	14	🟧2016·20
同解判据的证明	17	—
线性无关解组	18	—

真题覆盖：第 12 章 7 道真题全部有对应（2016·20→14、2019·6→6/10、2019·13→7、2022·6→8、2024·5→10、2025·6→10/16、2025·15→8）。

二、难度分布与命题意图

组	题量	占比	意图
A	6	33%	克拉默、基础解系、通解、解的个数——**四个必须成为肌肉记忆的动作**
B	8	44%	含参三情形（9）、同解求参（8）、三棱柱（10）、由解反求通解（11、13）、公共解（12）——**考试真实难度**
C	4	22%	两道证明 + 一道参数结构 + 一道构造，专攻"写不出过程"的毛病

三、防过拟合说明

- 所有数字、参数、维度**原创**；
- 只对齐"考法结构"：2016·20 考"矩阵方程解的判定"，本题用不同的 A, B 复现同一结构；
- 三平面题（10、16）刻意把"三棱柱"与"平行型"分开考，这是 2024–2025 真题的新风格。

四、薄弱点提示

若本卷错 4 题以上，优先回补：

1. $n - r$ **的含义**（第 5、11 题）——把 n 当成行数是最常见的低级错误；
2. **含参讨论不穷尽**（第 9 题）——$|A| = 0$ 的每个根都要单独代回；
3. **三棱柱**（第 10、16 题）——这是连考三年的点，必须能把"无解 + 法向量共面"翻译成几何图像。

> **下一步**：第 5 讲（矩阵的特征值和特征向量）的核心操作——解 $(A - \lambda E)x = 0$ ——用的正是本讲的齐次方程组方法。第 5 讲文件夹尚未创建，可按同样结构续建。