线性代数 第4讲 · 线性方程组 · 考点手册

> **定位**：本讲是**线性代数的收敛点**——第 3 讲的"向量线性表示"到这里变成"方程组有没有解"，第 2 讲的"秩"到这里变成"解的个数"。
> 真题库 **第 12 章**近十年 **7 题 39 分**，热度「常态」。**"三平面位置关系"连考 3 次**（2019·6、2024·5、2025·6），是本讲第一重点。
> **来源记号**：🟧 真题库 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。

---

0. 本讲定位与学习地图

一句话概括：**线性方程组的全部答案，都写在 $r(A)$ 与 $r(A,b)$ 的比较里。**

```
Ax = b
  │
  ├─ r(A) ≠ r(A,b) ──────────────► 无解
  │
  └─ r(A) = r(A,b) = r ─┬─ r = n ──► 唯一解
                        └─ r < n ──► 无穷多解（n−r 个自由未知量）
                                          │
                                          └─► 通解 = 特解 + 齐次通解
```

四条主线

主线	核心	真题落点
解的判定	$r(A)$ 与 $r(A,b)$	全部选填的底层
解的结构	特解 + 基础解系	2019·13、2016·20
几何意义	三平面位置关系 ⟺ 秩	2019·6、2024·5、2025·6
同解与公共解	$r(A)=r(B)=r(A,B)$	2022·6、2025·15

> ⚠️ **一个总原则**：**先判"有没有解"，再判"有多少解"，最后才求通解。**一步跳到最后是本章最常见的失分原因。

---

1. 基本概念与矩阵表示

n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$Ax = b, \qquad A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad b = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}},$$

增广矩阵记作 $\bar{A} = (A, b)$ 或 $(A \mid b)$ 。

三类问题（考试就考这三种）：

类型	问题	判据
齐次 $Ax = 0$	有没有非零解？解空间多大？	$r(A)$ 与 n
非齐次 $Ax = b$	有没有解？有几个？	$r(A)$ 与 $r(A, b)$ 与 n
含参	参数取何值时分别属于上面哪种？	先算行列式，再代回比秩

---

2. 克拉默法则（只适用于"方阵 + 唯一解"）

设 A 为 n 阶方阵，$|A| \neq 0$ ，则 $Ax = b$ 有**唯一**解

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 A_j 是把 A 的**第 j 列**换成 b 得到的矩阵。

推论（齐次版，最常用）：n 个方程 n 个未知量的**齐次**方程组

$$Ax = 0 \text{ 有非零解} \iff |A| = 0 \iff r(A) < n.$$

> **用法提示**：克拉默法则在考研里**极少用来真的求数值**（算 $n+1$ 个行列式太慢），它的价值在于**两条理论结论**：
> ① $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ 唯一解；② 齐次有非零解 $\Longleftrightarrow |A| = 0$ 。
> 真正求解一律用**初等行变换**（消元法）。

> ⚠️ **条件必须齐全**：方程个数 $=$ 未知数个数、且 $|A| \neq 0$ 。缺一个都不能用。

---

3. 齐次线性方程组 $Ax = 0$

3.1 两条基本事实

1. **必有零解**（$x = 0$ 永远成立），所以齐次方程组**不存在"无解"**；
2. 有非零解 $\iff r(A) < n$ （n 为未知量个数）。

> **直觉**：n 个未知量、r 个"有效约束"，还剩 $n-r$ 个自由度；自由度 ≥ 1 就有非零解。

3.2 解空间与基础解系

齐次方程组的**全体解**构成一个向量空间（对加法、数乘封闭），称为**解空间**，且

$$\dim\{\text{解空间}\} = n - r(A).$$

基础解系：解空间的**任意一组基**，即 $n-r(A)$ 个线性无关的解 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$，使任一解都可唯一表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} \qquad (k_i \text{ 任意}).$$

三条要点：

1. **个数固定**为 $n-r(A)$（不因选法而变）；
2. **不唯一**（任何一组基都行）；
3. 通解中的**任意常数个数** $= n-r(A)$。

> **考法**：题目问"基础解系含几个向量"或"通解含几个任意常数"，答案都是 $n-r(A)$ ——**不需要具体求解**。

3.3 求基础解系的标准五步

1. 写出系数矩阵 A；
2. **只作初等行变换**，化为**行最简形**（RREF：主元为 1，且主元所在列的其余元素全为 0）；
3. 主元所在的列 $\Longrightarrow$ **主元未知量**；其余列 $\Longrightarrow$ **自由未知量**（共 $n-r$ 个）；
4. 自由未知量依次取 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \cdots$，回代求出主元未知量；
5. 得到 $n-r$ 个解向量 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$，通解 $x = \sum k_i\xi_i$。

> ⚠️ **必须化到"行最简形"**，只化到阶梯形时回代容易出错；化到最简形后每个 ξ_i 可以直接"抄出来"。

3.4 齐次解的三条性质

1. 若 ξ, η 是解，则 $\xi+\eta$ 是解；
2. 若 ξ 是解，k 是数，则 $k\xi$ 是解；
3. 解的**任意线性组合**仍是解（这正是"解空间"的由来）。

---

4. 非齐次线性方程组 $Ax = b$

4.1 有解判定（三大定理）

设 A 为 $m \times n$，$r(A) = r$。

$$\boxed{Ax=b \text{ 有解} \iff r(A)=r(A,b)}$$

$$\boxed{\text{唯一解} \iff r(A)=r(A,b)=n; \qquad \text{无穷多解} \iff r(A)=r(A,b)<n}$$

$$\boxed{\text{无解} \iff r(A)<r(A,b) \quad (\text{此时 } r(A,b)=r(A)+1)}$$

> **为什么"无解"时秩只差 1**：增广矩阵只多了一列 b，加一列最多把秩抬高 1。

4.2 解的结构（本章最核心的公式）

若 $Ax=b$ 有解，η^* 是它的**某一个**解（特解），$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=b$ 的**通解**为

$$\boxed{x=\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}} \qquad (k_i \text{ 任意}).$$

一句话：**非齐次通解 = 一个特解 + 齐次通解。**

4.3 解的性质表（选择题必考）

设 η,η_1,η_2 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是 $Ax=0$ 的解：

组合	是哪个方程的解
$\eta_1-\eta_2$	$Ax=0$ （**两解之差必齐次**）
$\eta+\xi$	$Ax=b$
$k_1\eta_1+k_2\eta_2$	$Ax=b \iff k_1+k_2=1$
$k_1\eta_1+k_2\eta_2$	$Ax=0 \iff k_1+k_2=0$
$k\eta$	$Ax=kb$ （不是 b，除非 $k=1$ ）

> **记忆**：**系数和为 1 → 还是非齐次解；系数和为 0 → 变成齐次解。**这是因为 $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=(k_1+k_2)b$ 。

4.4 求通解的五步流程

1. 写增广矩阵 $(A\mid b)$；
2. 行变换化**行阶梯形**，读出 $r(A)$ 与 $r(A,b)$；
3. 若 $r(A)\neq r(A,b)$ → **无解**，结束；
4. 若相等，继续化**行最简形**，写出对应的同解方程组；
5. 令自由未知量为参数，得**特解**（自由未知量全取 0）与**齐次基础解系**，写出通解。

> **技巧**：化到最简形后，**特解** = 把常数项那列直接抄下来（自由未知量取 0）；**基础解系** = 每个自由未知量取 1、其余取 0 后解出的向量，前面加负号。这套"抄写法"比回代快得多，但要确保已经化到

> RREF。

---

5. 解的判定总表（贴在眼前）

设 A 为 $m \times n$，n 为未知量个数：

$r(A)$ 与 $r(A,b)$	与 n 的关系	结论	通解中参数个数
$r(A) < r(A,b)$	—	**无解**	—
$r(A) = r(A,b) = n$	等于	**唯一解**	0
$r(A) = r(A,b) = r < n$	小于	**无穷多解**	$n - r$

齐次的特例（$b = 0$，此时 $r(A) = r(A,b)$ 恒成立）：

条件	结论
$r(A) = n$	只有零解
$r(A) < n$	有非零解，解空间 $n - r$ 维

> ⚠️ **行数 m 不参与判定**（除非影响秩）。$m < n$ 时必有非零解（因为 $r(A) \le m < n$）——这是**秒杀**型结论。

---

6. 几何意义（真题连考 3 次）

6.1 二维：两条直线

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

秩	位置关系
$r(A) = r(A,c) = 2$	相交于一点（唯一解）
$r(A) = r(A,c) = 1$	两直线**重合**（无穷多解）
$r(A) = 1,\ r(A,c) = 2$	两直线**平行不重合**（无解）

6.2 三维：三个平面（必背表）

设三个平面 $\pi_i : a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$，$A = (a_{ij})_{3\times 3}$，$b = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$。

$r(A)$	$r(A,b)$	位置关系	解的情况
3	3	交于**一点**（三平面两两不平行）	唯一解
2	2	交于**一条直线**	无穷多解（1 个参数）
1	1	三平面**重合**（同一个平面）	无穷多解（2 个参数）
2	3	**两两相交但无公共点**（构成"三棱柱"）	无解
1	2	至少两个**平行且不重合**，无公共点	无解

> **读表口诀**：$r(A)$ **看法向量的"独立性"，**$r(A,b)$ **看"有没有公共点"。**
> $r(A)=3$：三个法向量不共面 → 三平面必交于一点（只要 $r(A,b)=3$ 恒成立，因为 3 阶满秩时增广也满秩）。
> $r(A)=2$：三个法向量共面（都垂直于同一条直线）→ 三平面**都平行于这条直线** → 要么共线相交，要么两两相交成"柱"。
> $r(A)=1$：三个法向量全平行 → 三平面平行（或重合）。

> ⚠️ $r(A)=2,\ r(A,b)=3$ **的"三棱柱"是最高频的坑**：三平面两两都相交（没有两个平行），但**没有公共点**，因为三条交线互相平行（像一个三棱柱的三条棱）。2019·6、2024·5、2025·6 都在这个点上做文章。

6.3 齐次方程组的几何意义

$Ax=0$ 的解空间是**过原点**的子空间：

- $n=3$、$r(A)=2$ → 解是一条过原点的**直线**（1 维）；
- $n=3$、$r(A)=1$ → 解是一个过原点的**平面**（2 维）；
- $n=3$、$r(A)=3$ → 只有原点。

> 对比：**非齐次**的解集是"**不过原点**的直线/平面"（偏移了一个特解）。

---

7. 同解方程组与公共解（真题 2 次）

7.1 齐次方程组同解的判据（必背）

设 A,B 是同列数的矩阵，则

$$\boxed{Ax=0 \text{ 与 } Bx=0 \text{ 同解} \iff r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}}$$

其中 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 是**上下拼接**（不是左右）。

理由：同解 $\Longleftrightarrow$ 两个解空间相等 $\Longleftrightarrow$ 维数相等且一个包含另一个 $\Longleftrightarrow$ 秩相等（$n-\dim$ 相同）且拼接后的解空间（交集）维数也相同。

7.2 非齐次方程组同解

非齐次的情形**先说清一件事**：若 $Ax=b$ 与 $Bx=c$ 同解且都有解，则必有 $b=c$ （同一个解代入两个方程）。所以非齐次同解问题的标准解法是：

$$\text{齐次部分同解} \ + \ \text{有一个公共特解.}$$

7.3 公共解（两个方程组的公共部分）

情形一 • 两个齐次方程组：公共解就是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的解，求它的基础解系即可。

情形二 • 两个非齐次方程组：公共解是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$ 的解，先判 r 再求通解。

情形三 • 一个齐次 + 一个非齐次：把齐次的解代入非齐次的方程，解出参数。

> **2023•7 的"交空间"与本节是同一件事**：交空间 = 两个"解空间"的公共部分，只是换了向量语言。

---

8. 矩阵方程

方程	有解条件	解法
$AX=B$	$r(A)=r(A,B)$ （**左右拼接**）	A 可逆时 $X=A^{-1}B$；一般按列拆成 n 个方程组
$XA=B$	$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ （**上下拼接**）	A 可逆时 $X=BA^{-1}$
$AXB=C$	A,C 可逆时唯一	$X=A^{-1}CB^{-1}$

> ⚠️ $AX=B$ **用左右拼，**$XA=B$ **用上下拼**——这一点最容易混。记忆法：X **在右边，拼在上下；**X **在左边，拼在左右**（"拼在与 X 相反的方向"）。

$AX=B$ **的通解**（A 不可逆时）：把 B 按列拆成 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，分别解 $Ax=\beta_j$，再拼回矩阵。若某个 β_j 不可表示，则整体无解。

---

9. 含参方程组的标准讨论流程（大题模板）

第一步 • 算行列式（若 A 是方阵）

$$|A|=f(\lambda).$$

第二步 • 分情况

情形	做法
$\|A\| \neq 0$	**唯一解**（可直接用克拉默法则，或说"由克拉默法则"）
$\|A\| = 0$ 的每个根 λ_i	**逐个代回**，算 $r(A)$ 与 $r(A, \lambda_i)$，再判无解 / 无穷多解

第三步 · 穷尽参数

- 若 $|A|$ 是多项式，**每个根都要单独讨论**，不能合并；
- 每个根下都要写清"$r(A) = ?$，$r(A, b) = ?$，故——"；
- 无穷多解时**必须写出通解**（题目通常要求）。

> ⚠️ **最常见的失分**：只讨论了 $|A| \neq 0$（唯一解）和 $|A| = 0$（需逐个代回）两种情况，**没有把 $|A| = 0$ 的多个根分开**。比如 $|A| = (a-1)^2(a+2)$，必须分别讨论 $a = 1$ 与 $a = -2$。

---

10. 十年真题落点地图（🟧 第 12 章 7 题 39 分）

年份·题号	题型	分值	考点	本手册节
2016·20	解答	11	矩阵方程解的判定	§8
2019·6	单选	4	解的几何意义（三平面）	§6.2
2019·13	填空	4	基础解系与通解	§3.3 / §4.4
2022·6	单选	5	齐次方程组同解	§7.1
2024·5	单选	5	**解的几何意义（三平面）**	§6.2
2025·6	单选	5	**线性方程组的几何意义**	§6.2
2025·15	填空	5	同解条件求参数	§7.1

分布规律：

- **三平面几何 3 次**（2019、2024、2025），且 **2024、2025 连续两年**——这是改革后选择题的新风格：**不让你求通解，只让你判位置关系**；
- **同解 2 次**（2022、2025），都是"求参数使同解"，用 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 一步到位；
- **基础解系/通解**只在 2019 出过一次填空，但它是**第 5 讲求特征向量的必备技能**，不能不练；
- 大题只有 2016 一次（矩阵方程），属"低频但 11 分"。

跨章牵连：第 5 讲的 $(A - \lambda E)x = 0$ 求特征向量，完全就是本讲的齐次方程组；第 6 讲的正交变换也要解方程组。

---

11. 速查卡 • 陷阱清单

11.1 速记十条

1. 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)$；无解时 $r(A,b)=r(A)+1$；
2. 唯一解 $\Leftrightarrow$ 同 $=n$；无穷多 $\Leftrightarrow$ 同 $<n$，参数个数 $n-r$；
3. 齐次**必有零解**，不存在"无解"；有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$；
4. 基础解系个数 = $n-r(A)$ = 通解中任意常数个数；
5. 非齐次通解 = **特解 + 齐次通解**；
6. 两解之差是齐次解；**系数和为 1 仍是特解、和为 0 是齐次解**；
7. 克拉默法则：方阵 + $|A|\neq 0$；齐次有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$；
8. 三平面：$r(A)=3$ 一点、$r(A)=r(A,b)=2$ 一线、$r(A)=r(A,b)=1$ 重合；$r(A)=2, r(A,b)=3$ **三棱柱**；
9. 齐次同解 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$（**上下拼**）；
10. $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$（**左右拼**）。

11.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
用 $r(A)=r(A,b)<n$ 说"唯一解"	唯一解要 $=n$
齐次方程组问"无解的条件"	齐次**永远有解**（零解）
通解里写 n 个任意常数	是 $n-r(A)$ 个
只化到阶梯形就抄基础解系	必须化到**行最简形**
求基础解系时用了列变换	只能用**行**变换
认为"两解之和"仍是特解	是 $2b$，不是 b
同解判定时把 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 写成 (A,B)	同解用**上下拼**，$AX=B$ 用**左右拼**
含参讨论只分 $|A|=0$ 与 $\neq 0$ 两类	每个根都要**单独**讨论
把 $r(A)=2, r(A,b)=3$ 说成"三平面平行"	是**两两相交但无公共点**（三棱柱），没有任何两个平行
非齐次同解忽略"b 必须相同"	同解则 $b=c$

> **下一步**：开做 02-试题（18 题，约 95 分钟）。做完对 03-解析。