线性代数 第3讲 · 向量 · 解析

> 对应 02-试题。每题给「**答案 / 思路 / 易错点 / 真题骨架**」。

三条贴在眼前的判据

$$\beta \text{ 可被 } \alpha \text{ 表示} \iff r(A)=r(A,\beta);\qquad \alpha_1,\cdots,\alpha_s \text{ 相关} \iff r(A)<s;$$
$$A\cong B \iff r(A)=r(B)=r(A,B).$$

A 组 · 基础

第 1 题

答案：（Ⅰ）线性相关；（Ⅱ）$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$，即 $\alpha_2=3\alpha_1-\alpha_3$。

思路：三个三维向量，个数 = 维数，用行列式。

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&0&5\end{vmatrix}=1(15-0)-1(10-1)+2(0-3)=15-9-6=0,$$

故线性相关。求关系式即解 $Ax=0$：

$$x_1+2x_2+x_3=0,\qquad x_1+3x_2=0,\qquad 2x_1+x_2+5x_3=0.$$

由第二式 $x_1=-3x_2$，代入第一式得 $x_3=x_2$，第三式自动满足。取 $x_2=1$，得 $(-3,1,1)^{\mathrm{T}}$，即

$$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

易错点：

1. 行列式展开时**符号**（代数余子式的 $(-1)^{i+j}$）最容易错；
2. 关系式**不唯一**（可整体乘 k），写出任一组不全为零的系数即可；
3. 算出行列式为 0 只说明"相关"，**还要**解方程求出关系式，不然（Ⅱ）没答。

第 2 题

答案：秩 $=2$；极大无关组取 $\{\alpha_1,\alpha_3\}$；$\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_3$。

思路：按列拼矩阵，只作**行变换**：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&4&1&3\\-1&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1,\ r_3+r_1}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

非零行 2 行 $\Longrightarrow$ 秩 $=2$；主元在第 **1、3** 列 $\Longrightarrow$ 极大无关组为 $\{\alpha_1,\alpha_3\}$。

由主元列的对应关系直接读出：第 2 列 $=2\times$ 第 1 列，第 4 列 $=$ 第 1 列 $+$ 第 3 列，即

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \qquad \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3.$$

（可直接验算：$(1,2,-1)+(0,1,1)=(1,3,0)$ 。）

易错点：

1. **不能用列变换**——列变换会破坏列之间的线性关系，主元列就对不上原向量；
2. 极大无关组必须回到**原**向量，不能抄阶梯形里的列；
3. 表示系数要**从阶梯形的行关系反推**，不能直接读阶梯形列。

第 3 题

答案：（Ⅰ）能表示，且**唯一**；（Ⅱ）$\beta = -\dfrac{1}{2}\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 + \dfrac{3}{2}\alpha_3$ 。

思路：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3×3：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 0 + 1(1-0) = 2 \neq 0.$$

故 $r(A)=r(A,\beta)=3=s$，**表示法唯一**。解方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$：

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{2}.$$

验算：$-\frac{1}{2}(1,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{3}{2}(1,0,1)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$ ✓。

易错点：

1. 判"能否表示"要用 $r(A)$ 与 $r(A,\beta)$ **一起**看，只算 $|A|$ 不够（$|A|=0$ 时才需再比增广）；
2. "唯一"的条件是 $r(A)=r(A,\beta)=s$，**漏了** $=s$ **这一条**就会把"无穷多解"误判为唯一；
3. 三个方程的**变量顺序**别与 α 的下标错位。

第 4 题

答案：（Ⅰ）两两正交，$\|\alpha\|=\|\beta\|=\|\gamma\|=3$；（Ⅱ）**是**规范正交基；（Ⅲ）$-18$ 。

思路：

（Ⅰ）逐个算内积：

$$(\alpha,\beta)=2-4+2=0, \quad (\alpha,\gamma)=2+2-4=0, \quad (\beta,\gamma)=4-2-2=0.$$

长度：$\|\alpha\|=\sqrt{1+4+4}=3$，同理 $\|\beta\|=\|\gamma\|=3$ 。

（Ⅱ）三个两两正交的非零向量必线性无关，$\mathbb{R}^3$ 中三个无关向量即为一组基；再单位化就是**规范正交基**：

$$e_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^{\mathrm{T}},\quad e_2=\frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\quad e_3=\frac{1}{3}(2,1,-2)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅲ）先算组合再算内积：

$$\alpha+2\beta=(5,-2,4)^{\mathrm{T}},\qquad \gamma-\beta=(0,3,-3)^{\mathrm{T}},$$
$$(\alpha+2\beta,\gamma-\beta)=0-6-12=-18.$$

易错点：

1. $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，**别忘了开方**；
2. 单位化是**除以长度**（$1/3$），不是除以长度的平方；
3. （Ⅲ）**先算向量再作内积**最稳；若用内积的双线性展开要小心符号。

第 5 题

答案：

$$\beta_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \beta_2=\frac{1}{2}(1,-1,2)^{\mathrm{T}};$$
$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

思路：

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}.$$

验算：$(\beta_2,\beta_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$ ✓。

单位化：$\|\beta_1\|=\sqrt{2}$，$\|\beta_2\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故

$$e_1=\frac{\beta_1}{\sqrt{2}},\qquad e_2=\frac{\beta_2}{\sqrt{6}/2}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

易错点：

1. 分母是 $(\beta_1,\beta_1)=2$，**不是** $\|\beta_1\|=\sqrt{2}$；
2. β_2 的两个分量都带 $\frac{1}{2}$，通分后是 $\frac{1}{2}(1,-1,2)$，单位化时**分子分母的 2 会约掉**，容易少乘或多乘；
3. 只正交化完不算完，题目要求"规范"，还须**单位化**。

第 6 题

答案：**B**。

思路：逐项判。

- （A）秩相等**推不出**等价：$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\beta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 秩都是 1，但互相不能表示（$r(A,B)=2$），*X*；

- （B）等价意味着互相可表示，由 $A=BC$ 得 $r(A)\le r(B)$，对称地 $r(B)\le r(A)$，故相等，✓；
- （C）单向表示不够，还要"反向"，✗；
- （D）等价的组**个数可以不同**：$\{(1,0),(0,1)\}$ 与 $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ 等价，但一个是 2 个、一个是 3 个，✗。

易错点：（D）是最容易误判的——等价只要求**张成同一个空间**，与向量个数无关。另外，等价的组**秩必然相等**，但秩相等的组**不一定等价**，这两句话要能分开说。

B 组 • 中等

第 7 题

答案：（Ⅰ）β 组**线性无关**；（Ⅱ）$r(\gamma)=2$。

思路：统一用"系数矩阵 + 行列式"。

（Ⅰ）写成矩阵形式

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C.$$

$$|C|=1(1-0)-0+1(1-0)=2\neq 0\Longrightarrow C\text{ 可逆}\Longrightarrow r(\beta)=r(\alpha)=3,$$

故 β 组线性无关。

（Ⅱ）同理

$$C_\gamma=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},\qquad |C_\gamma|=0\ (\text{三列之和为 }0),$$

且前两列不成比例，故 $r(C_\gamma)=2$，从而 $r(\gamma)=2$，γ 组线性相关（$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$）。

易错点：

1. **不要**真的把 β_i 用具体数字算出来（α_i 没有给具体数值），必须走"系数矩阵"；
2. 系数矩阵的**列**是每个 β_j 的系数，写成行就转置了，行列式值会差一个符号（判相关不影响，但求秩的方向会乱）；
3. γ 组的相关关系是 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$，直接相加即可看出，比算行列式更快。

第 8 题

答案：（Ⅰ）$a=1$ 或 $a=2$；（Ⅱ）两种情形下秩**都**为 2。

思路：三个三维向量，算行列式。

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}.$$

这是范德蒙德型（三列分别是 $(1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,2,4)^{\mathrm{T}},(1,a,a^2)^{\mathrm{T}}$ 的转置结构），故

$$|A|=(2-1)(a-1)(a-2)=(a-1)(a-2).$$

（也可直接展开：$|A|=a^2-3a+2$。）

（Ⅰ）线性相关 $\Longleftrightarrow$ $|A|=0$ $\Longleftrightarrow$ $a=1$ 或 $a=2$。

（Ⅱ）**当 $a=1$ 时**：$\alpha_1=\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3-\alpha_1=(0,3,0)^{\mathrm{T}}$ 与 α_1 无关，故秩 $=2$。

当 $a=2$ 时：$\alpha_2=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2-\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3-\alpha_2=(0,2,2)^{\mathrm{T}}$，二者成比例，故秩 $=2$。

易错点：

1. 范德蒙德行列式要**看清是谁的幂**：本题是 $(1,2,a)$ 的 $0,1,2$ 次幂，故因子是 $(a-1)(a-2)$；
2. "相关"只给出 a 的两个值，**还必须**分别求秩（题目分两问，第二问常被漏掉）；
3. $a=1$ 时不要误以为秩 $=1$ ——α_3 与 α_1 无关，秩仍是 2。

第 9 题

答案：

$$\beta_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=\frac{1}{2}(1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=\frac{2}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}};$$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

思路：

$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2.$$

逐项算：$(\alpha_3,\beta_1)=1$，$(\beta_1,\beta_1)=2$，故第一项系数 $\frac{1}{2}$；

$(\alpha_3,\beta_2)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1=\frac{1}{2}$，$(\beta_2,\beta_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$，故第二项系数 $\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}$。

于是

$$\beta_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{2}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅲ）验算：

$$(\beta_3,\beta_1)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0=0,\qquad (\beta_3,\beta_2)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0.$$

单位化：$\|\beta_3\|=\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，故 $e_3=\dfrac{\beta_3}{2/\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

易错点：

1. 算 β_3 时**必须减两项**（对 β_1 和 β_2 的投影各一次），漏一项就不正交；
2. 第二项的分母是 $(\beta_2,\beta_2)=\frac{3}{2}$，容易误用 $(\beta_1,\beta_1)=2$；
3. 本题 $\beta_1\perp\beta_2$ 但 β_2 与 β_3 的正交**不是**自动的，必须靠减投影实现。

第 10 题

答案：（Ⅰ）**等价**；（Ⅱ）C 与 D **不等价**，故秩相等不是充分条件。

思路：

（Ⅰ）直接观察系数：

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \beta_2=\alpha_1-\alpha_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

于是 B 可由 A 表示；又 $\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$、$\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$，故 A 也可由 B 表示。互相可表示 $\Longrightarrow$ **等价。**

用判据验：$r(A)=2$，$r(B)=2$，$r(A,B)=2$（四列都在同一个二维平面里），故 $A\cong B$。

（Ⅱ）$r(C)=r(D)=1$，但

$$r(C,D)=r\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\neq 1,$$

故 C 与 D **不等价**（$(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 无法互相表示）。

结论：**秩相等是等价的必要条件，不是充分条件**；充分条件是 $r(A)=r(B)=r(A,B)$。

易错点：

1. 只看秩相等就判等价——本题（Ⅱ）就是反例；
2. 判"等价"要**双向**，只证一个方向不够；
3. $r(A,B)$ 是把两组**并排拼**（不是上下拼），上下拼 $r\binom{A}{B}$ 用于"$XA=B$ 有解"那一类问题。

第 11 题

答案：

（Ⅰ）$|C|=-2\neq 0$，是基；

（Ⅱ）$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$；

（Ⅲ）β 在 α 基下的坐标为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 。

思路：

（Ⅰ）三向量按列拼成 C：

$$|C|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1(0-1)-0+1(0-1)=-2\neq 0,$$

故三者线性无关，是 $\mathbb{R}^3$ 的基。

（Ⅱ）按定义 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$ ，而 α_j 在标准基下的坐标就是它自己的分量，所以

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

（Ⅲ）解 $Cx=\beta$：

$$\begin{cases}x_1+x_3=1\\x_2+x_3=2\\x_1+x_2=3\end{cases}\Longrightarrow x_3=0,\ x_1=1,\ x_2=2.$$

坐标为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 。**验算**：$1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=(1,0,1)+(0,2,2)=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ ✓。

易错点：

1. **过渡矩阵的列**是新基在**旧基**下的坐标——顺序反了会得到 C^{-1} ；
2. 过渡矩阵必须**可逆**，算完顺手验一下行列式；
3. 坐标是解 $Cx=\beta$ ，**不是**解 $C^{\mathrm{T}}x=\beta$ （除非 C 正交）。

第 12 题

答案：（Ⅰ）$t=2$ ；（Ⅱ）$r(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=3$ 。

思路：把三个向量拼成矩阵

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&t\end{pmatrix},\qquad |A,\beta|=t-2.$$

（Ⅰ）β 可表示 $\Longleftrightarrow$ $r(A)=r(A,\beta)$ 。$r(A)=2$ （两列不成比例），故需 $|A,\beta|=0$ ，即 $t=2$ 。此时 $\beta=(1,1,2)^{\mathrm{T}}=\alpha_1+\alpha_2$ 。

（Ⅱ）$t\neq 2$ 时 $|A,\beta|\neq 0$ ，三列线性无关，故 $r(A,\beta)=3$ ；而此时 $r(A)=2\neq 3$ ，正是"**无解**"的秩特征。

易错点：

1. 别只算 $|A|$ （那是 2×2 都不成立，A 是 3×2 没有行列式）——**要用增广矩阵的行列式**；
2. $t=2$ 时表示**唯一**（因为 $r(A)=2=s$ ），若两列线性相关才会出现不唯一；

3. （Ⅱ）的答案固定是 $r(A)+1=3$：不能表示时增广矩阵的秩**恰好比 A 多 1**。

第 13 题

答案：（Ⅰ）$\gamma=(5,2,1)^{\mathrm{T}}$；（Ⅱ）$\delta$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$。

思路：

（Ⅰ）坐标乘基向量：

$$\gamma=2\alpha_1+(-\alpha_2)+3\alpha_3=2(1,0,1)^{\mathrm{T}}-(0,1,1)^{\mathrm{T}}+3(1,1,0)^{\mathrm{T}}=(5,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅱ）解 $Cx=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$：

$$x_1+x_3=1,\quad x_2+x_3=1,\quad x_1+x_2=1.$$

三式相加得 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$，逐一代回得 $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{2}$。

验算：$\frac{1}{2}\big[(1,0,1)+(0,1,1)+(1,1,0)\big]=\frac{1}{2}(2,2,2)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ ✓。

易错点：

1. （Ⅰ）是"坐标 → 向量"（乘 C），（Ⅱ）是"向量 → 坐标"（解 $Cx=\beta$），**两个方向别混**；
2. 一般情形下"坐标 → 向量"乘 C，"向量 → 坐标"要乘 C^{-1} ——这正是"坐标变换方向与基变换相反"；
3. 三式相加的技巧（对称结构）能省一半时间。

第 14 题

答案：秩 $=3$；极大无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$；$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$。

思路：按列拼矩阵并作行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

非零行 3 行 $\Longrightarrow$ 秩 $=3$；主元在第 1、2、3 列 $\Longrightarrow$ 极大无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$。

第 4 列在主元列下的关系是 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，故

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3.$$

验算：$(1,1,0,0)-(0,1,1,0)+(0,0,1,1)=(1,0,0,1)$ ✓。

易错点：

1. 4 个 4 维向量**不能**直接用"个数 > 维数"判相关（个数 $=$ 维数），必须算秩；

2. 主元列只是"一个"极大无关组，取 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 也对（只要三个无关）；

3. 表示系数看的是**行的化简结果**，不是原矩阵的列。

C 组 · 拔高

第 15 题

答案：见证明。

思路：

（Ⅰ）设

$$c_0\beta+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3=0.$$

代入 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 并按 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 整理：

$$c_0k_1\alpha_1+(c_0k_2+c_2)\alpha_2+(c_0k_3+c_3)\alpha_3=0.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，三个系数全为 0：

$$c_0k_1=0,\qquad c_0k_2+c_2=0,\qquad c_0k_3+c_3=0.$$

由 $k_1\neq0$ 得 $c_0=0$，进而 $c_2=c_3=0$。故 β,α_2,α_3 线性无关。

（Ⅱ）关键是 $k_i\neq0\ (i=1,2,3)$，**任一** α_i 都能由 β 与其余两个反解出来。以换掉 α_1 为例，（Ⅰ）的证明可**逐字照搬**（它只用到 $k_1\neq0$ 这一个条件）。若换掉 α_2，则设 $c_0\beta+c_1\alpha_1+c_3\alpha_3=0$，代入整理得

$$c_0k_1+c_1=0,\qquad c_0k_2=0,\qquad c_0k_3+c_3=0,$$

由 $k_2\neq0$ 得 $c_0=0$，再得 $c_1=c_3=0$。三种情形同理，故**任一** α_i 都可被 β 替换而保持无关。

易错点：

1. 必须说明**为什么** $c_0=0$ **这一步**——靠 $k_i\neq0$，这是题目条件的作用所在；
2. 不能只说"β 能被 α 表示"就完事，要**证无关**（用定义，不能靠"个数相同"这类间接理由）；
3. 三个 k_i 都不为 0 才能"任意替换"，缺一个就只能替换特定的那些——这是本题条件的精确含义。

第 16 题

答案：（Ⅰ）$\dim V_1=\dim V_2=2$，$\dim(V_1+V_2)=3$；（Ⅱ）$V_1\cap V_2=L\big((1,-2,-3)^{\mathrm{T}}\big)$，维数 1；（Ⅲ）$3=2+2-1$，成立。

思路：

（Ⅰ）α_1,α_2 不成比例，故 $\dim V_1=2$；同理 $\dim V_2=2$。

把四个向量并排拼成 3×4 矩阵，取前三列 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$：

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1(1-0) - 0 + 1(1-0) = 2 \neq 0,$$

故 $r(A,B)=3$，即 $\dim(V_1+V_2)=3$（等于整个 $\mathbb{R}^3$）。

（Ⅱ）设 $\gamma \in V_1 \cap V_2$，则存在 x_1,x_2,y_1,y_2 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2.$$

即 $x_1(1,1,0)+x_2(0,1,1)=y_1(1,0,1)+y_2(0,1,2)$，比较分量：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

由前两式 $y_1=x_1$、$y_2=x_1+x_2$，代入第三式：

$$x_2 = x_1 + 2(x_1+x_2) \Longrightarrow x_2 = 3x_1 + 2x_2 \Longrightarrow x_2 = -3x_1.$$

取 $x_1=1$，得 $x_2=-3$，回代

$$\gamma = \alpha_1 - 3\alpha_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}} - 3(0,1,1)^{\mathrm{T}} = (1,-2,-3)^{\mathrm{T}}.$$

验算：γ 在 V_2 中的表示：解 $y_1(1,0,1)+y_2(0,1,2)=(1,-2,-3)$ 得 $y_1=1$、$y_2=-2$，$1\cdot(1,0,1)-2(0,1,2)=(1,-2,-3)$ ✓。

故 $V_1\cap V_2 = L\big((1,-2,-3)^{\mathrm{T}}\big)$，维数 1。

（Ⅲ）$2+2-1=3=\dim(V_1+V_2)$ ✓。

另一条快速解法（平面法）：V_1 是平面 $x-y+z=0$，V_2 是平面 $x+2y-z=0$，两平面法向量不平行故交于一条直线，方向取叉积：

$$(1,-1,1)\times(1,2,-1) = (-3,2,3),$$

与 $(1,-2,-3)$ 成比例 ✓。

易错点：

1. 交空间不能直接"看"，必须解方程；设 $\gamma = Ax = By$ 后是**齐次**方程组，取非零解；
2. 维数公式里的 $\dim(V_1+V_2)$ 是**并排拼**后的秩，不是两个秩相加；
3. 交空间基**只取一个方向**（1 维），不要写成两个向量。

第 17 题

答案：见证明。

思路：

（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Longrightarrow$ 存在**不全为零**的 k_1,k_2,k_3 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

若 $k_1=0$，则 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 且 (k_2,k_3) 不全为零，即 α_2,α_3 线性相关。由"部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关"，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性相关，与题设矛盾。故 $k_1\neq 0$，于是

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3,$$

即 α_1 可由 α_2,α_3 线性表示。

（Ⅱ）反证。若 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示：

$$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3.$$

由（Ⅰ）$\alpha_1\in L(\alpha_2,\alpha_3)$，代入得 $\alpha_4\in L(\alpha_2,\alpha_3)$，即存在 m_2,m_3 使 $\alpha_4=m_2\alpha_2+m_3\alpha_3$，也就是

$$m_2\alpha_2+m_3\alpha_3-\alpha_4=0,$$

α_4 的系数 $-1\neq 0$，说明 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，与题设矛盾。故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

易错点：

1. （Ⅰ）的**关键一步是排除 $k_1=0$ 的情形**，这一步不写等于没证；
2. "部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关"这条要在（Ⅰ）里**明确引用**，不能默认；
3. （Ⅱ）必须用**反证**（正面很难说清"不能"），且矛盾要指回题设的"$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 无关"。

第 18 题

答案：见证明。

思路：

（Ⅰ）**先证同解。**

- 若 $Ax=0$，则两边左乘 A^{T} 得 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$；
- 反之若 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，两边左乘 x^{T} 得

$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0\Longrightarrow(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=0\Longrightarrow\|Ax\|^2=0\Longrightarrow Ax=0.$$

故两个方程组**同解**，解空间相同，维数相同：

$$n-r(A^{\mathrm{T}}A)=n-r(A)\Longrightarrow r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A).$$

(这里用到 $A^{\mathrm{T}}A$ 是 n 阶方阵、$r(A^{\mathrm{T}}A)\leq r(A)$ 本就成立。)

（Ⅱ）$A^{\mathrm{T}}A$ 是 n 阶方阵，故

$$A^{\mathrm{T}}A\text{ 可逆}\iff r(A^{\mathrm{T}}A)=n\iff r(A)=n\iff A\text{ 的列向量组线性无关.}$$

易错点：

1. 第二步反推必须用 x^{T} 左乘凑出 $\|Ax\|^2$，**不能**直接约去 A^{T}（A^{T} 不是方阵、未必可逆）；
2. 由"同解"得"秩相等"要**说清依据**：解空间维数 $=n-r$；
3. 本题只对**实**矩阵成立（用了内积正定性）；复矩阵要改成 $A^{H}A$。

命题质量报告

一、考点覆盖表

考点	题号	真题骨架
线性相关性判定（具体数字）	1	🟧2024·6
秩与极大无关组	2、14	🟧2017·13
线性表示（唯一性）	3、12	🟧2020·6
内积、长度、正交	4	🟧2023·15（同考法）
施密特正交化	5、9	🟧2021·6
向量组等价	6、10	🟧2022·7
变换后的相关性（系数矩阵法）	7	🟩仓库
含参数的秩	8	🟧2017·13
基与过渡矩阵、坐标变换	11、13	🟧2019·20
交空间与维数公式	16	🟧2023·7
替换定理	15	🟩仓库
相关/无关的推证	17	🟩仓库
内积证秩 $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$	18	🟩仓库（第 2 讲 §6.2 的证明化）

真题覆盖：第 11 章 8 道真题**全部有对应**（2024·6→1、2017·13→2/8、2020·6→12、2023·15→4、2021·6→9、2022·7→6/10、2019·20→11/13、2023·7→16）。

二、难度分布与命题意图

组	题量	分值占比	意图
A	6	33%	把"行列式判相关、秩与主元列、表示唯一性、内积与施密特、等价"五个基本动作练成条件反射
B	8	44%	含参（8、12）、变换后（7）、过渡矩阵（11、13）、交空间前置（16 的前半）——**考试的真实难度区间**
C	4	22%	三道证明 + 一道结构分析，专攻"定义证明"与"反证"，这是选填题拉不开、大题才考的能力

三、防过拟合说明

- 所有数字、维度、参数**全部原创**，未抄任何真题数值；
- 只对齐"**考法结构**"：例如 2019·20 考"基与过渡矩阵 + 求坐标"，本题用不同基底复现同一结构；
- 标「真题骨架」的题做完**可直接回刷真题原题**，不会因为数字相同而产生"背答案"的假象。

四、薄弱点提示

若本卷错 4 题以上，优先回补：

1. **极大无关组**（第 2、14 题）——错在这里说明"行变换 + 主元列"的流程没固化；
2. **变换后相关性**（第 7 题）——不会写"系数矩阵 + 行列式"是硬伤，后面第 5 讲特征向量会继续用；
3. **过渡矩阵方向**（第 11、13 题）——这是全讲唯一可能出大题的点，方向搞反等于零分。

> **下一步**：进入 线性代数-第4讲-线性方程组/01-考点手册。本讲的"表示 ⟺ 有解 ⟺ 秩相等"会在那里展开成完整的解结构理论。