线性代数 第3讲 · 向量 · 考点手册

> **定位**：向量是"**用一组向量去表示另一批向量**"的学问。真题库 **第 11 章**近十年 **8 题 44 分**，热度「常态」，**单选为主**，但 2019·20 出过 11 分大题（基与过渡矩阵）。
> **本讲是第 2 讲与第 4 讲的桥**：线性表示 ⟺ 方程组有解 ⟺ 秩相等。**一句话贯穿全讲。**
> **来源记号**：🟧 真题库 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。

---

0. 本讲定位与学习地图

一句话概括：**向量组的一切问题，都翻译成矩阵的秩。**

```
向量组 α1..αs（排成矩阵的列）
        │
        ├──► 线性表示：β 能否由 α 组表示 ──► r(A)=r(A,β) ──► 方程组有解（第4讲）
        │
        ├──► 线性相关：是否存在非零系数使组合为 0 ──► r(A)<s ──► 齐次方程有非零解
        │
        ├──► 秩与极大无关组：r(A) ──► 主元列
        │
        ├──► 等价：可互相表示 ──► r(A)=r(B)=r(A,B)
        │
        ├──► 内积/正交/施密特 ──► 规范正交基 ──► 正交矩阵（第2讲）──► 正交变换（第6讲）
        │
        └──► 基/维数/坐标/过渡矩阵 ──► 坐标变换（2019·20 大题）
```

六条主线与真题对应

主线	核心结论	真题落点
线性表示	$r(A)=r(A,\beta)$	2020·6、2023·7、2023·15
线性相关	$r(A)<s$	2024·6
秩与极大无关组	行变换 + 主元列	2017·13
向量组等价	$r(A)=r(B)=r(A,B)$	2022·7
施密特正交化	正交化 + 单位化	2021·6
基与过渡矩阵	$(\text{新})=(\text{旧})C$	2019·20

---

1. 向量与向量组

1.1 基本概念

n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 是**列向量**（本章默认列向量）。线性运算按分量进行。

向量组：同维数的若干个向量构成的集合 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 。

1.2 向量组的矩阵表示（第一个关键动作）

把 s 个 n 维**列**向量拼成 $n\times s$ 矩阵：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$

于是：

- 向量组的**秩**就是 $r(A)$；
- "β 可由 α 组表示"就是"$Ax=\beta$ 有解"；
- "α 组线性相关"就是"$Ax=0$ 有非零解"。

> ⚠️ **方向别搞反**：s 个 n 维**列**向量拼成的是 $n\times s$ （**行数 = 维数，列数 = 向量个数**）。若拼成行向量矩阵（$s\times n$），则要转置过来、结论对偶。考场上**统一拼成列**最省事。

---

2. 线性表示

2.1 定义

若存在数 $k_1,\cdots,k_s$ 使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,$$

则称 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **线性表示**（线性表出）。

2.2 三个等价判据（必须背成条件反射）

$$\boxed{\beta\text{ 可由 }\alpha_1,\cdots,\alpha_s\text{ 表示}\iff Ax=\beta\text{ 有解}\iff r(A)=r(A,\beta)}$$

其中 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$(A,\beta)$ 是**增广矩阵**。

三种情形的精确判据（设 A 为 $n\times s$）：

情形	秩条件	方程组语言
不能表示	$r(A)\neq r(A,\beta)$ （此时 $r(A,\beta)=r(A)+1$）	无解
可表示且**表示法唯一**	$r(A)=r(A,\beta)=s$	唯一解
可表示且**表示法不唯一**	$r(A)=r(A,\beta)<s$	无穷多解

> **为什么"唯一"要求 $= s$ **：系数个数是 s，方程组的系数矩阵列满秩（$r = s$）才能约束住每一个系数。

2.3 表示式与矩阵乘法的统一视角

设 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_t)$，则

$$B = AC \iff \text{每个 } \beta_j \text{ 都可由 } \alpha \text{ 组表示,}$$

其中 C 的第 j 列就是 β_j 的表示系数。**这条是"向量组相互表示"的矩阵语言**，第 5 节判定等价时直接用。

推论（极常用）：

$$B = AC \implies r(B) \le r(A).$$

即"**被表示的组，秩不超过表示的组**"——因为 B 的每一列都落在 A 的列空间里。

2.4 常用结论

1. **零向量可被任何向量组表示**（取全 0 系数）；
2. 任一 α_i 可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表示（取 e_i）；
3. 若 β 可由 α 组表示，且每个 α_i 可由 γ 组表示，则 β 可由 γ 组表示（**传递性**）；
4. β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表示 $\iff$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **等价**（秩相同且后者的组能被前者表示...实际判据见 §5）。

---

3. 线性相关与线性无关

3.1 定义

若存在**不全为零**的数 $k_1, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关**；否则（只有全零系数才成立）称**线性无关**。

> **语义**：线性相关 = 组里**有冗余**（至少一个向量是"多余的"）；线性无关 = 每个向量都**不可替代**。

3.2 三个等价判据

设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 为 $n \times s$：

$$\boxed{\alpha_1, \cdots, \alpha_s \text{ 线性相关} \iff r(A) < s \iff Ax = 0 \text{ 有非零解}}$$

$$\boxed{\text{线性无关} \iff r(A) = s \iff Ax = 0 \text{ 只有零解}}$$

特别地（$s=n$ 时，方阵）：

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_n \text{ 线性无关} \iff |A|\neq 0.$$

> ⚠️ **只有向量个数 = 维数时才能用行列式。**n 维空间里给 $n+1$ 个向量，不用算行列式，直接判"**必相关**"。

3.3 八条定理（选择题与证明题的全部弹药）

1. **含零向量必相关**（0 的系数取 1，其余取 0）；
2. **单个向量**：α 相关 $\iff \alpha=0$；
3. **两个向量**：α,β 相关 $\iff$ 对应分量成比例（共线）；
4. **部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关**；等价地，**整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关**；
5. **延长无关、截短相关**：无关向量组每个向量**增加**分量后仍无关；相关向量组**减少**分量后仍相关。（同一个线性关系逐分量成立）
6. **个数超过维数必相关**：m 个 n 维向量，若 $m>n$ 则必相关；
7. **"多"被"少"表示则相关**：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 表示，且 $s>t$，则 α 组**必相关**；
8. **替换定理**：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **唯一**表示。

> **第 5 条最容易反着记**：**"无关"是"抗延长"的**——在低维无关，加上分量后依然无关；反过来，**相关是"抗截短"的。**
> 口诀：**无关可以"加"，相关可以"减"。**

> **第 7 条的本质**：$r(\alpha)\le r(\beta)\le t<s$，而 α 有 s 个向量，秩小于个数 $\Longrightarrow$ 相关。**这是"维数决定一切"的体现。**

3.4 几何直观（三维，帮助记忆与秒判）

个数	无关的几何含义	相关时
1 个	非零向量	零向量
2 个	不共线	共线（成比例）
3 个	**不共面**	共面（含共线情形）
4 个及以上	在 $\mathbb{R}^3$ 中**不可能**	必相关

> 2020·6（直线相交）与 2024·5（三平面）都是把**几何位置关系**翻译成**秩**的题。三维里"三个向量共面 $\iff$ 混合积为 0 $\iff$ 行列式为 0"。

3.5 判定的标准流程

1. **向量个数 ≠ 维数**：个数 $>$ 维数 → 直接判**相关**；个数 $<$ 维数 → 只能算秩；
2. **个数 = 维数**：算行列式，$\neq 0$ 无关、$=0$ 相关；
3. **含参数**：算行列式（或化阶梯形），令其为 0 解出参数；
4. **抽象向量组**（α_i 的组合）：写成 $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)C$，判 C 是否可逆——**这一步是转化为"系数矩阵的行列式"的关键。**

---

4. 向量组的秩与极大线性无关组

4.1 定义

- **极大线性无关组**：向量组中的部分组，本身线性无关，再添任一向量（原组内的）都变相关；
- **向量组的秩**：极大无关组所含向量的个数，记 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，且它等于 $r(A)$。

两条基本事实：

1. 秩为 r 的向量组中，**任意 r 个线性无关的向量**都构成极大无关组（不唯一）；
2. 原组中**每个向量**都可由极大无关组**唯一**表示。

4.2 求法（唯一正确姿势：只作行变换）

1. 把向量**按列**拼成矩阵 A；
2. 只作**初等行变换**，化为**行阶梯形**；
3. 数非零行数得秩 r；
4. **主元所在的列号**（第 1、3 列之类）→ 对应**原矩阵**中同序号的向量，即为一个极大无关组。

> ⚠️ **两个致命错误**：
> ① 用**列变换**求列向量组的极大无关组——列变换会**改变列之间的线性关系**，主元列对不上原向量；
> ② 把**变换后的**列向量当成极大无关组——必须回到**原**向量（阶梯形里的列已经被改过了）。

> **对偶记忆**：求**列**向量组的极大无关组用**行**变换；求**行**向量组的极大无关组用**列**变换。（"动另一边"）

4.3 秩与相关性/表示的关系

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s \iff \text{线性无关};\qquad r<s \iff \text{线性相关}.$$

$$\beta \text{ 可由 } \alpha \text{ 组表示} \iff r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta).$$

$$\text{若 } \alpha \text{ 组可由 } \beta \text{ 组表示，则 } r(\alpha)\le r(\beta).$$

---

5. 向量组等价

5.1 定义

若向量组 A 中每个向量都可由 B 线性表示，且 B 中每个向量都可由 A 线性表示，则称 A 与 B **等价**，记 $A \cong B$ 。

> **直觉**：等价 = 两组"张成同一个空间"（列空间相同）。

5.2 判定定理（三合一）

设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ ， $B=(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ ， 则

$$\boxed{A \cong B \iff r(A)=r(B)=r(A,B)},$$

其中 (A,B) 是把两组向量**并排拼**成的大矩阵。

另一条好用的判据：若 A 可由 B 表示（即存在 C 使 $A=BC$ ），则

$$A \cong B \iff r(A)=r(B).$$

5.3 三条性质与一个反例

性质	说明
反身、对称、传递	等价关系（可放心传递）
等价 $\Longrightarrow$ 秩相等	必要条件
秩相等 $\not\Longrightarrow$ 等价	**必须加上"能互相表示"**

反例（2022·7 的核心陷阱）： $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\beta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 秩都为 1，但互相**不能**表示，故不等价。判据给出 $r(A,B)=2\neq 1$ ，一眼看穿。

---

6. 内积、长度与正交

6.1 定义与性质

$$(\alpha,\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)},\qquad \cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}.$$

性质	式子
对称	$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
线性	$(k\alpha+\mu\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+\mu(\beta,\gamma)$
正定	$(\alpha,\alpha)\geq 0$，等号仅当 $\alpha=0$
Cauchy–Schwarz	$\lvert(\alpha,\beta)\rvert\leq\lVert\alpha\rVert\,\lVert\beta\rVert$
三角不等式	$\lVert\alpha+\beta\rVert\leq\lVert\alpha\rVert+\lVert\beta\rVert$

> **内积证秩的样板**：若 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，则 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$，即 $\lVert Ax\rVert^2=0$，故 $Ax=0$。于是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 与 $Ax=0$ 同解，得 $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$。**这个手法在 C 组第 18 题会再练一次。**

6.2 正交与正交向量组

- $\alpha\perp\beta\iff(\alpha,\beta)=0$；
- **正交向量组（全为非零向量）必线性无关**：设 $\sum k_i\alpha_i=0$，两边与 α_j 作内积得 $k_j\lVert\alpha_j\rVert^2=0$，故 $k_j=0$；
- **反之不成立**：线性无关未必两两正交（如 $(1,0),(1,1)$）。

> **这条"正交 $\Longrightarrow$ 无关"是施密特正交化合法性的根基**：正交化不改变张成的空间，却把"无关"升级成"正交"，从而便于求坐标。

6.3 规范正交基

若 $e_1,\cdots,e_r$ 两两正交且都是单位向量，且它们张成子空间 V，则称其为 V 的**规范正交基**（标准正交基）。

- 判定：$(e_i,e_j)=\delta_{ij}$；
- 由规范正交基构成的矩阵 $Q=(e_1,\cdots,e_r)$ 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q=E$（方阵时即正交矩阵）。

---

7. 施密特正交化（2021•6 真题）

7.1 两步公式

给定线性无关的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$：

第一步 • 正交化

$$\beta_1=\alpha_1,\qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

一般地

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\alpha_k, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j.$$

第二步・单位化

$$e_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|} \qquad (k = 1, \cdots, s).$$

7.2 计算流程与自检

1. **先判无关**（相关的话 (β_j, β_j) 可能为 0，公式失效）；
2. 按顺序算 $\beta_1 \to \beta_2 \to \cdots$，**每一项都要减掉"对前面所有 β 的投影"**（漏减一项就前功尽弃）；
3. **自检**：算完后必须验 $(\beta_i, \beta_j) = 0\ (i \neq j)$；
4. 单位化时**只除长度，不改方向。**

7.3 三类典型错误

错误	后果
减投影时只用 α 与 β_1 的内积，漏了 β_2	β_3 与 β_2 不正交
分母写成 (β_j, β_j) 却代成 $\|\beta_j\|$	结果差一个平方，必须重算
先单位化再正交化	顺序错了，公式里要用的是"未单位化的 β "

> **考法**：2021·6 是单选，给了三个向量问正交化后的结果（或问某个系数）。**选择题可以直接用"正交 $\Longrightarrow$ 内积为 0"反验选项**，不必全算。

---

8. 向量空间、基、坐标与过渡矩阵（2019•20 大题）

8.1 向量空间与子空间

- **向量空间**：对加法与数乘封闭的非空向量集合（必含零向量）；
- **子空间**：V 的非空子集，对加法与数乘封闭；
- **由向量组张成的子空间**：$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s\}$，其维数 $= r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$。

8.2 基、维数、坐标

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 V 的一组**基**，则 V 中任一向量 β 可**唯一**表示为

$$\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r,$$

称 $(x_1, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$ 为 β 在该基下的**坐标。**求坐标 = **解线性方程组** $Ax = \beta$ 。

> $\dim V = r$；$\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下坐标就是分量本身。

8.3 过渡矩阵（本章唯一的大题考点）

设 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 与 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 是同一空间的两组基，若

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\, C,$$

则 C 称为从基 ε 到基 α 的**过渡矩阵**。

三条要点：

1. C 的**第 j 列**是 α_j 在**旧基** ε 下的坐标；
2. C **必可逆**（两组基都是极大无关组，C 的行列式 $\neq 0$）；
3. **方向**：从 ε 到 α 是 C；从 α 到 ε 是 C^{-1}。

8.4 坐标变换公式

同一向量 β 在两组基下的坐标 x_ε 与 x_α 满足

$$\boxed{x_\varepsilon = C\, x_\alpha, \qquad x_\alpha = C^{-1} x_\varepsilon.}$$

> **记忆**：**坐标的变换方向与基的变换方向相反**（基"往前走"用 C，坐标"往后退"用 C^{-1}）——这是 2019·20 最爱设的坑。

8.5 子空间的交与和（2023•7 真题）

设 $V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$，$V_2 = L(\beta_1, \cdots, \beta_t)$：

- **和**：$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$，故
$$\dim(V_1 + V_2) = r(A, B);$$
- **交**：$\gamma \in V_1 \cap V_2 \iff \gamma = Ax = By$ 有解 $\iff$ 解齐次方程组 $(A, -B)\binom{x}{y} = 0$，取其非零解回代即得交空间的基；
- **维数公式**：
$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}.$$

> **快速判断**：在 $\mathbb{R}^3$ 中两个过原点的平面（各 2 维），若 $r(A, B) = 3$ 则交于一条直线（$2 + 2 - 3 = 1$）；若 $r(A, B) = 2$ 则两平面重合（交为 2 维）。

---

9. 十年真题落点地图（🟧 第 11 章 8 题 44 分）

年份·题号	题型	分值	考点	本手册节
2017·13	填空	4	向量组的秩	§4.2
2019·20	解答	11	**基与过渡矩阵**	§8.3 / §8.4
2020·6	单选	4	直线相交与向量线性表示	§2.2 / §3.4
2021·6	单选	5	**施密特正交化**	§7
2022·7	单选	5	**向量组等价**	§5.2
2023·7	单选	5	线性表示（**交空间**）	§8.5
2023·15	填空	5	向量内积与线性组合	§6.1
2024·6	单选	5	**向量组线性相关性**	§3.2 / §3.5

分布规律：

- **7 题选填（33 分） + 1 题大题（11 分）**；选填里"判定类"（相关、等价、表示）占绝对多数；
- **2022 起年年有题**（2022、2023 两次、2024），热度在上升；
- **交空间（2023•7）是新提法**，本质仍是"两个向量组能否互相表示"，但叠加了子空间的几何语言；
- 大题只在 2019 出过一次（过渡矩阵），**属于"低频但一旦考就是 11 分"**，不能放弃。

---

10. 速查卡 • 陷阱清单

10.1 速记十条

1. **一律按列拼矩阵**：n 维、s 个 → $n \times s$；
2. 可表示 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,\beta)$；唯一 $\Leftrightarrow$ 再 $=s$；
3. 相关 $\Leftrightarrow r(A)<s$；无关 $\Leftrightarrow r(A)=s$；
4. 个数 $>$ 维数 → **必相关**；$s=n$ 时才看行列式；
5. **无关可加（延长），相关可减（截短）**；
6. 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关；部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关；
7. 极大无关组：**只作行变换，取主元列，回到原向量**；
8. 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$；**秩相等不够**；
9. 正交（非零）$\Longrightarrow$ 无关；施密特 = 逐项减投影 + 单位化；
10. 过渡矩阵的列 = **新基在旧基下的坐标**；坐标变换用 C^{-1}（方向相反）。

10.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
求极大无关组时用了列变换	只能用**行**变换
把阶梯形里的列当答案	取**原矩阵**中同序号列
用 `r(A)=r(B)` 判等价	还要 $r(A,B)=r(A)$
认为"线性相关"就"每个向量都能被其余表示"	只保证**存在某个**能被表示
用行列式判 $n+1$ 个 n 维向量	直接判相关，不用算
施密特时漏减前面某个 β_j	每一项要减**全部**前面的投影
分母用 $\|\beta_j\|$	用 (β_j,β_j)
过渡矩阵方向搞反	从 ε 到 α 是 C，坐标用 C^{-1}
认为"正交向量组"可以有零向量	零向量与任何向量正交，但正交组必须**全非零**才无关
坐标变换与基变换同方向	**相反**

> **下一步**：开做 02-试题（18 题，约 95 分钟）。做完对 03-解析。