线性代数 第2讲 · 矩阵 · 考点手册

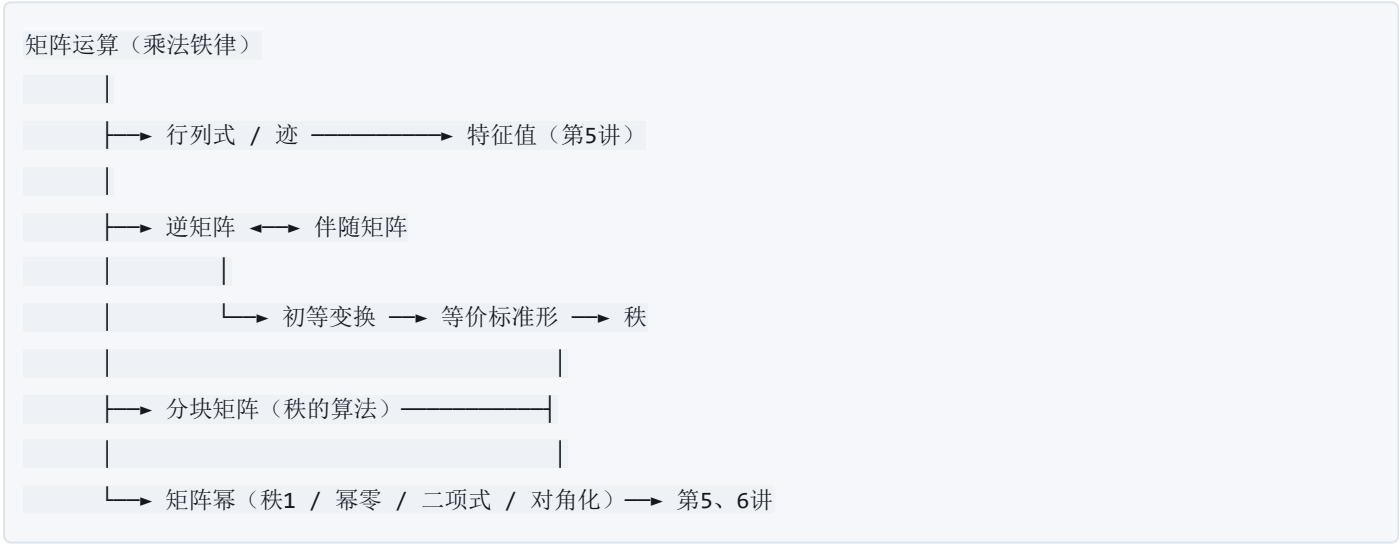
> **定位**：矩阵是线代的**语言层**——向量、方程组、特征值、二次型的全部计算最后都落在矩阵上。真题库 **第 10 章**近十年 **11 题 71 分**，热度「热门」，六章里分值第二高。
> **本讲不出习题**（按你的安排）。练法：背熟本手册的**秩不等式、伴随公式、分块结论、矩阵幂四条路线**，在第 3–6 讲的题里随时调用。
> **来源记号**：🟧 真题库 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。

---

0. 本讲定位与学习地图

一句话概括：**矩阵的一切都归结为「秩」和「可逆」**——可逆是"最好情况"，秩是"退化了多少"。

依赖链



本讲五条主线

主线	核心产出	真题落点
运算铁律	不可交换、不可消去、转置反序	2022·15
逆与伴随	可逆 12 条等价、$AA^*=\|A\|E$	2017·5、2022·5
初等变换	**左行右列**、初等矩阵的逆	2018·21、2020·5
秩	10 条不等式、$r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$	2025·7
分块	分块对角/三角的逆与秩	2018·6、2021·7、2023·5
矩阵幂	秩 1 / 幂零 / 二项式 / 递推	2016·21、2024·21

> ⚠️ **一个总开关**：遇到"矩阵关系式"（如 $A^2+2A-3E=O$ 、$AB=A+B$ ）第一时间想**因式分解**，凑出 $XY=E$ ，这是所有抽象求逆、抽象可逆判定的统一入口。

1. 矩阵的基本运算

1.1 线性运算与相等

- **同型**（行数、列数都相同）才能相加；$A+B$ 对应元素相加，kA 每个元素乘 k 。
- $A=B \iff$ 同型且对应元素全等。

1.2 乘法：三条铁律

设 A 为 $m\times n$ ， B 为 $n\times s$ ，则 AB 为 $m\times s$ ，元素为"**左行乘右列**"：

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

铁律	说明	反例
不可交换	$AB\neq BA$ 一般成立（甚至型不同、根本不能相乘）	$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ ， $AB\neq BA$
不可消去	$AB=AC$ 且 $A\neq O$ **推不出** $B=C$	上例中 $AB=O$ 但 $B\neq O$
不可分配幂	$(AB)^k\neq A^kB^k$ 一般	同上

推论：

- $AB=O$ **推不出** $A=O$ 或 $B=O$ （与数的乘法本质不同）；
- $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ **只在** $AB=BA$ 时成立；
- $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ **只在** $AB=BA$ 时成立；
- 幂的运算 $(A^m)(A^n)=A^{m+n}$ 对**同一个** A 恒成立（同底数天然可交换）。

> **为什么不可交换**：矩阵乘法的本质是"**线性变换的复合**"——先旋转再拉伸 ≠ 先拉伸再旋转。

1.3 转置

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A,\quad (A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}},\quad (kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}},\quad \boxed{(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}.$$

> **反序律的推广**：$(A_1A_2\cdots A_s)^{\mathrm{T}}=A_s^{\mathrm{T}}\cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}$ 。
> **和逆矩阵的公式成对记**：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 、$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$ 、$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ ——**三条都是"反序"**。

1.4 特殊矩阵族（按"幂性质"分类最有用）

类型	定义	关键性质
单位矩阵 E	主对角为 1	$AE=EA=A$
数量矩阵 kE	主对角全为 k	与**任意**同阶矩阵可交换
对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$	非对角全 0	相乘 = 对应位置相乘；$\Lambda^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)$
对称矩阵	$A^{\mathrm{T}}=A$	特征值全为实数；不同特征值的特征向量正交（第 5 讲）
反对称矩阵	$A^{\mathrm{T}}=-A$	主对角全 0；奇数阶时 $\lvert A\rvert=0$，**必不可逆**
正交矩阵	$A^{\mathrm{T}}A=E$	$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$；$\lvert A\rvert=\pm1$
幂等矩阵	$A^2=A$	$A^k=A$；$r(A)+r(A-E)=n$
对合矩阵	$A^2=E$	$A^{-1}=A$；$A^{2k}=E$、$A^{2k+1}=A$
幂零矩阵	$A^k=O$（某 k）	n 阶时必有 $A^n=O$；$E-A$ 必可逆

两条常用分解（🟩 仓库）：

- **任意方阵 = 对称 + 反对称**：$A=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}+\dfrac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}$；
- **任意方阵 × 转置必对称**：$A^{\mathrm{T}}A$ 与 AA^{T} 都是对称矩阵（且半正定，第 6 讲）。

1.5 什么情况下可以交换（四类情形，考选择题常靠它）

1. A 与 kE（数量矩阵）；
2. A 与 A^{-1}、A 与 A^*、A 与 $f(A)$（同一个 A 的"函数"之间都交换，故 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$）；
3. 两个**同阶对角矩阵**（更一般：同时对角化的两个矩阵）；
4. 题设**明确给出** $AB=BA$。

> **其余一律不许交换。**考场上凡是要合并 $AB+BA$ 成 $2AB$ 的地方，必须先确认可交换。

---

2. 方阵的行列式与迹

2.1 行列式八条公式

$$|A^{\mathrm{T}}|=|A|,\qquad |kA|=k^n|A|\ (n\text{ 阶}),\qquad \boxed{|AB|=|A|\,|B|},$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|},\qquad |A^*|=|A|^{n-1},\qquad |A^m|=|A|^m,\qquad |A^{\mathrm{T}}A|=|A|^2.$$

> ⚠️ $|A+B| \neq |A|+|B|$ ——**这是行列式最常设的陷阱。**$|A+B|$ 一般**没有**公式。
> ⚠️ 注意 $|kA| = k^n|A|$ 里的 n 是**阶数**，不是元素个数；三阶时是 k^3 。

2.2 迹 tr

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B, \qquad \mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}\,A, \qquad \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\,A,$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)} \quad (\text{只要求两个乘积都有意义}).$$

用途（后面反复用）：

- 秩 1 矩阵 $A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 的迹 $= \beta^{\mathrm{T}}\alpha$ ，直接给出它唯一的非零特征值；
- $\mathrm{tr}\,A = \sum \lambda_i$ ，$|A| = \prod \lambda_i$ ——**特征值与行列式/迹的桥**（第 5 讲高频）。

---

3. 逆矩阵

3.1 定义与唯一性

若存在 B 使 $AB = BA = E$ ，则称 A **可逆**，$B = A^{-1}$ 。逆矩阵**唯一**（若 B, C 都是逆，则 $B = BE = B(AC) = (BA)C = C$ ）。

> **判定义时只需验一侧**：对**方阵**而言，$AB = E$ 已经能推出 $BA = E$ （有限维），所以验一侧即可。

3.2 可逆的 12 条等价条件（背下来，选择题直接秒）

A 为 n 阶方阵，以下**全部等价**：

#	条件	出处
1	$\lvert A\rvert \neq 0$	行列式
2	$r(A)=n$ （满秩）	秩
3	A 的**列**向量组线性无关	第 3 讲
4	A 的**行**向量组线性无关	第 3 讲
5	A 的列（行）向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一组**基**	第 3 讲
6	$Ax=0$ **只有零解**	第 4 讲
7	对**任意** b，$Ax=b$ 有**唯一**解	第 4 讲
8	A 与 E **等价**（可经初等变换化为 E）	初等变换
9	A 可表示为**若干初等矩阵之积**	初等变换
10	A 的特征值**全不为 0**	第 5 讲
11	A^* 可逆	伴随
12	$A^{\mathrm{T}}A$ **正定**（A 列满秩）	第 6 讲

> **记忆线索**：**行列式 ≠ 0 → 满秩 → 列无关 → 只有零解 → 唯一解 → 等价于 E**，这是一条链，只要记住链头（$\lvert A\rvert \neq 0$）就能串出全部。

3.3 逆的运算法则

$$(A^{-1})^{-1}=A,\qquad (kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}\ (k\neq 0),\qquad \boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}},$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}},\qquad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

> ⚠️ $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$，**一般没有公式**。$A,B$ 都可逆**推不出** $A+B$ 可逆（如 $A=E$、$B=-E$）。
> 处理 $A+B$ 的通用手法：**提公因子**——若 A 可逆，则 $A+B=A(E+A^{-1}B)$，于是 $A+B$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $E+A^{-1}B$ 可逆。

3.4 抽象矩阵求逆：凑 $XY=E$ 的四个模板

模板一：由多项式关系凑

设 $A^2+2A-3E=O$。求 A^{-1} 与 $(A+E)^{-1}$。

$$A^2+2A=3E\implies A(A+2E)=3E\implies A\cdot\frac{A+2E}{3}=E\implies A^{-1}=\frac{A+2E}{3}.$$

对 $A+E$：把等式配方成含 $(A+E)$ 的形式

$$A^2+2A-3E=(A+E)^2-4E=O \implies (A+E)^2=4E \implies (A+E)\cdot\frac{A+E}{4}=E \implies (A+E)^{-1}=\frac{A+E}{4}.$$

模板二：由 $A+B=AB$ 型凑

$$A+B=AB \implies AB-A-B=O \implies (A-E)(B-E)=E.$$

于是 $A-E$ 与 $B-E$ **互为逆矩阵**，且两者都可逆。**口诀**：移项后两边同时减 E （"$-A-B$ 配成 $-(A-E)-(B-E)$ "）。

同类：$A+B+AB=O \Longrightarrow (A+E)(B+E)=E$；
$AB-A-2B=O \Longrightarrow (A-2E)(B-E)=2E \Longrightarrow (A-2E)\cdot\frac{B-E}{2}=E$。

模板三：幂零级数型

若 $A^k=O$，则

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E-A^k=E,$$

所以 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$ （**有限项，不需要收敛性**）。同理 $(E+A)^{-1}=E-A+A^2-\cdots$。

模板四：分块型

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}.$$

> **验证方法**：直接乘一遍即可（考场上写"易验"就行，不要试图推导）。

---

4. 伴随矩阵 A^*

4.1 定义与核心公式

$A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的**代数余子式**（注意是**转置**后的排列）。

$$\boxed{AA^*=A^*A=|A|E}$$

由此立刻得到两条**最常用**的推论：

$$|A|\neq 0 \implies A^{-1}=\frac{A^*}{|A|},\qquad A^*=|A|A^{-1}.$$

4.2 二阶伴随的口诀

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \implies A^*=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix},$$

即"**主对角互换，副对角变号**"。三阶及以上只能老实算 9 个代数余子式。

4.3 伴随七条性质

公式	说明
$\|A^*\| = \|A\|^{n-1}$	由 $\|A\|\|A^*\| = \|A\|^n$ 得
$(A^*)^* = \|A\|^{n-2}A$	$n \geq 2$；特别 $n=2$ 时 $(A^*)^* = A$
$(kA)^* = k^{n-1}A^*$	**不是** k^n
$(AB)^* = B^*A^*$	反序
$(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$	转置不反序（同一位置）
$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$	A 可逆时
A^* 的特征值为 $\dfrac{\|A\|}{\lambda_i}$	A 可逆时（第 5 讲）

4.4 伴随的秩：三段式（选择题必考）

$$\boxed{r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) \leq n-2. \end{cases}}$$

记忆：**满秩 → 满秩；差一 → 变 1；差二 → 归零。**

理由速览：$r(A)=n$ 时 $A^* = |A|A^{-1}$ 可逆；$r(A)=n-1$ 时 $A^* \neq O$（存在非零的 $n-1$ 阶子式）但 $A^*A = O$，故 $r(A^*) \leq n - r(A) = 1$，只能等于 1；$r(A) \leq n-2$ 时所有 $n-1$ 阶子式为 0，$A^* = O$。

---

5. 初等变换与初等矩阵（真题重灾区）

5.1 三种初等变换

1. 交换两行（列）；
2. 用非零数 k 乘某行（列）；
3. 把某行（列）的 k 倍加到另一行（列）。

初等矩阵：对 E 作**一次**初等变换得到的矩阵，记作 E_{ij}（交换 i,j 两行）、$E_i(k)$、$E_{ij}(k)$。

5.2 左行右列定理（最重要的一句话）

$$\boxed{\text{左乘初等矩阵} = \text{作同种行变换；右乘初等矩阵} = \text{作同种列变换。}}$$

- $E_{ij}A$：交换 A 的 i,j **两行**；AE_{ij}：交换 A 的 i,j **两列**；
- $E_i(k)A$：A 的第 i **行**乘 k；$AE_i(k)$：第 i **列**乘 k；

- $E_{ij}(k)A$：A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行；$AE_{ij}(k)$：A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列。

> ⚠️ **$\mathbf{E_{ij}(k)}$ 的方向最容易错**：$E_{ij}(k)A$ 是"**第 j 行 → 第 i 行**"（行指标是"新位置"，列指标是"来源"）。$AE_{ij}(k)$ 则反过来是"**第 i 列 → 第 j 列**"。
> **考场验算技巧**：取 $A=E$ 试一次就知道方向对不对。

5.3 初等矩阵的逆与转置

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij}=E_{ij}^{\mathrm{T}},\qquad E_i(k)^{-1}=E_i\left(\frac{1}{k}\right),\qquad E_{ij}(k)^{-1}=E_{ij}(-k).$$

> 三种初等矩阵**都可逆**，且逆仍是同类型初等矩阵——这正是"A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 是初等矩阵之积"的来源。

5.4 矩阵等价与等价标准形

A 经**有限次**初等变换化为 B，称 A 与 B **等价**。任意 $m\times n$ 矩阵 A（$r(A)=r$）都等价于

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n},$$

即存在可逆 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$。**初等变换不改变秩**，所以等价的充要条件是**同型且同秩**。

5.5 用初等变换求逆（只许行变换）

$$[\,A\mid E\,]\xrightarrow{\text{行变换}}[\,E\mid A^{-1}\,].$$

求 $AX=B$ 则用 $[\,A\mid B\,]\to[\,E\mid A^{-1}B\,]$。

> ⚠️ **求逆只能用行变换**。若同时用列变换，左边化成 E 时右边已经不是 A^{-1} 了（右边被"右乘"了某个 Q）。
> 若坚持用列变换，则要对**竖排**的 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 作列变换化为 $\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$。

5.6 真题两个坑（2018•21 / 2020•5）

坑一：把"列变换"当成"行变换"。题目说"A 经若干次**列**变换化为 B"，则正确的表达是

$$B=AP\quad(P\text{ 可逆，且是初等矩阵之积}),$$

而**不是** $B=PA$。若行、列变换都用过，则 $B=PAQ$。

坑二：误以为"A 与 B 等价"能推出"$A=B$ 或相似"。等价只保证**同秩**，既不保特征值也不保行列式。

标准解法：把题目给的每一步变换**逐次写成矩阵乘法**（左乘/右乘对应初等矩阵），最后合并成 P 或 Q。2018•21 的 11 分大题就是这么做的。

---

6. 矩阵的秩

6.1 三个等价定义

1. **最高阶非零子式的阶数**（定义）；
2. **行秩**（行向量组的秩）= **列秩**（列向量组的秩）——三者恒相等；
3. $r(A)=r \iff A$ 可经初等变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$。

6.2 十条不等式（2025•7 就考这个）

#	结论	备注
1	$0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$	满秩 / 降秩
2	$r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})$	高频
3	$\lvert r(A)-r(B)\rvert \le r(A\pm B) \le r(A)+r(B)$	三角不等式
4	$r(AB) \le \min\{r(A),r(B)\}$	乘法降秩
5	$r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$	**Sylvester**，A 的列数 $=B$ 的行数 $=n$
6	$AB=O \Longrightarrow r(A)+r(B) \le n$	5 的推论，极高频
7	$r(ABC) \ge r(AB)+r(BC)-r(B)$	Frobenius，考研少用
8	$A^2=A \Longrightarrow r(A)+r(A-E)=n$	$\ge$ 用三角，$\le$ 用 $A(A-E)=O$
9	$A^2=E \Longrightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$	同上，$(A+E)(A-E)=O$
10	$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$	分块对角，见 §7

两条必须会证（考过证明思路）：

- **第 6 条**：$AB=O \Longrightarrow B$ 的每一列都是 $Ax=0$ 的解，故 B 的列向量组落在解空间内，$r(B) \le n-r(A)$。
- **第 8 条**：$\ge$ 用 $r(A)+r(A-E) \ge r\big(A-(A-E)\big)=r(E)=n$；$\le$ 用 $A(A-E)=O$ 配第 6 条。

> **怎么用第 2 条**：$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$ 的证明是"$Ax=0$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 同解"——只需证 $A^{\mathrm{T}}Ax=0 \Rightarrow x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0 \Rightarrow \|Ax\|^2=0 \Rightarrow Ax=0$。**这是内积证秩的样板**（第 3 讲 C 组会再练）。

6.3 秩与"可乘可逆"

$$P,Q \text{ 可逆} \Longrightarrow r(PAQ)=r(A).$$

含义：初等变换不改变秩；等价类由秩唯一确定。**这条是把"抽象矩阵的秩"化成"具体矩阵的秩"的唯一通道。**

7. 分块矩阵（真题重灾区：3 次）

7.1 分块运算的合法性

- **加法**：同型且**同一种分法**；
- **乘法**：**前块的列分法 = 后块的行分法**；
- **转置**：每块转置 + **整体反序**：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$。

7.2 分块对角与分块三角

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|,$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} A^{k} & O \\ O & B^{k} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

分块三角的逆（四块都要对上号）：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

7.3 分块矩阵的秩：六条结论（本章第一重点）

$$\text{(i)}\quad r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = r(A) + r(B);$$

$$\text{(ii)}\quad r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B); \qquad \text{(iii)}\quad r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B);$$

$$\text{(iv)}\quad \max\{r(A), r(B)\} \leq r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) + r(C);$$

$$\text{(v)}\quad r\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = r(A); \qquad \text{(vi)}\quad r\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = r(A+B) + r(A-B).$$

证 (v)：$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} E & E \end{pmatrix}$，两边分别是列满秩、行满秩，故秩 $= r(A)$。

证 (vi)：左乘可逆矩阵 $\begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix}$（其行列式 $|-2E| = (-2)^n \neq 0$）：

$$\begin{pmatrix} E & E \\ E & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ A-B & B-A \end{pmatrix},$$

再把第 2 块列减去第 1 块列（右乘可逆矩阵），得 $\begin{pmatrix} A+B & O \\ A-B & 2(B-A) \end{pmatrix}$，故秩 $= r(A+B) + r(A-B)$。

证 (ii) 的直观：前 $r(A)$ 个线性无关的 A 的行，配上右块零，仍线性无关；B 的 $r(B)$ 个无关行也如此，且这两组行"位置不重叠"，故至少 $r(A) + r(B)$。

7.4 分块题的标准解法（三步）

1. **先看能不能"分块初等变换"化简**：用可逆的分块矩阵左乘/右乘（形如 $\begin{pmatrix} E & O \\ X & E \end{pmatrix}$ 这类），把 C 消掉；
2. **再用 (i)–(vi)** 套结论；
3. 若 A 可逆，可用 **Schur 补**：

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\left(D - CA^{-1}B\right) \qquad (A \text{ 可逆}).$$

> **2018•6 / 2021•7 / 2023•5 的共同套路**：题目给出 $r(A)$ 与某些关系（如 $A^2 = A$ 、$AB = O$ ），问某个分块矩阵的秩。**先想办法把它化成 (i)(ii)(v)(vi) 之一**，不要硬算元素。

---

8. 矩阵方程

方程	有解条件	解法（A 可逆时）
$AX = B$	$r(A) = r(A, B)$ （B 的每列都能被 A 的列表示）	$X = A^{-1}B$ ，或 $[A \mid B] \to [E \mid A^{-1}B]$
$XA = B$	$r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$	$X = BA^{-1}$ ，或转置成 $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$
$AXB = C$	A, C 都可逆时才唯一	$X = A^{-1}CB^{-1}$

> ⚠ **不能写成** $\dfrac{B}{A}$ ——矩阵没有除法；$XA = B$ 的解是 BA^{-1} （**右乘**），不是 $A^{-1}B$ 。
> ⚠ $AX = B$ 且 A **不可逆**时，解**不唯一**，要用"逐列解方程组"或按第 4 讲的方法求通解。

抽象矩阵方程的标准动作：先**移项、提公因子**，把 X 单独留在一边：

$$AX + X = B \implies (A + E)X = B \implies X = (A + E)^{-1}B.$$

---

9. 矩阵幂与递推（大题主线，真题 2 次）

9.1 四条路线（按识别特征选）

特征	路线	公式
$A = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$ （秩 1）	用迹	$A^k = \left(\operatorname{tr} A\right)^{k-1}A$
$A^k = O$ （幂零）	二项式截断	$A^m = O\ (m \geq n)$
A 与某矩阵可交换	二项式展开	$(A + B)^n = \sum \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$
可对角化	$A = P\Lambda P^{-1}$	$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ （第 5 讲）

9.2 秩 1 矩阵公式（2016•21 的核心）

若 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ （α,β 为 n 维列向量，$\beta^{\mathrm{T}}\alpha\neq 0$），则

$$A^2=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\,\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\big(\operatorname{tr}A\big)A,$$

$$\boxed{A^k=\big(\beta^{\mathrm{T}}\alpha\big)^{k-1}A=\big(\operatorname{tr}A\big)^{k-1}A\quad(k\geq 1).}$$

配套结论（考选择常一起考）：秩 1 矩阵的特征值为 $\operatorname{tr}A,\,0,\,0,\cdots,0$；$A$ 可对角化 $\Longleftrightarrow\operatorname{tr}A\neq 0$。

> **识别技巧**：题目给的 A 若**每一行都是同一行的倍数**（或每一列都是同一列的倍数），就是秩 1，立刻写 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$。

9.3 幂零与二项式

若 $A^k=O$，则 n 阶时 $A^n=O$，于是

$$(E+A)^n=E+nA+\binom{n}{2}A^2+\cdots+A^n=E+nA+\cdots+\binom{n}{n-1}A^{n-1}.$$

典型：$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A^3=O$。

9.4 递推数列构造矩阵（2024•21 的骨架）

若 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$，令 $\xi_n=\binom{a_{n+1}}{a_n}$，则

$$\xi_n=\begin{pmatrix}p&q\\1&0\end{pmatrix}\xi_{n-1}\Longrightarrow\xi_n=M^{\,n-1}\xi_1,$$

再把 M 对角化求 M^{n-1}（第 5 讲）。**这是"递推 → 矩阵幂 → 对角化"的三段式**，2024·21 的 12 分题正是这条链。

---

10. 正交矩阵（连接第 3、5 讲）

定义：$A^{\mathrm{T}}A=E$（等价于 $AA^{\mathrm{T}}=E$，等价于 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$）。

五条等价刻画：

1. $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$；
2. A 的**列**向量组是**规范正交基**；A 的**行**向量组也是；
3. A 保持内积：$(Ax,Ay)=(x,y)$；
4. A 保持长度：$\|Ax\|=\|x\|$；
5. $|A|=\pm 1$。

⚠️ $|A|=\pm 1$ 只是**必要**条件，**不充分**（如 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 行列式为 1 但不是正交矩阵）。

特征值：实特征值只能是 ± 1；复特征值的模为 1（第 5 讲）。

---

11. 十年真题落点地图（🟧 第 10 章 11 题 71 分）

年份·题号	题型	分值	考点	本手册节
2016·21	解答	11	矩阵幂与线性组合	§9.2
2017·5	单选	4	可逆矩阵判定	§3.2
2018·6	单选	4	**分块矩阵的秩**	§7.3
2018·21	解答	11	**初等列变换**与可逆矩阵	§5.2 / §5.6
2020·5	单选	4	初等列变换	§5.2
2021·7	单选	5	**分块矩阵的秩**	§7.3
2022·5	单选	5	可逆的判定	§3.2
2022·15	填空	5	矩阵恒等变形	§3.4
2023·5	单选	5	**分块矩阵的秩**	§7.3
2024·21	解答	12	**递推数列与矩阵幂**	§9.4
2025·7	单选	5	**矩阵秩的不等式**	§6.2

分布规律：

- **选择/填空 7 题 31 分**（可逆判定、分块秩、初等列变换、秩不等式、恒等变形）——**全是结论题**，背熟就得分；
- **大题 3 题 34 分**（矩阵幂 2 次、初等变换 1 次）——第 21 题的主力之一；
- **分块矩阵的秩 3 次**（2018、2021、2023），间隔 2–3 年，**下一次大概率落在 2026 前后。**

跨章牵连：矩阵的秩是第 3 讲（向量组的秩）、第 4 讲（方程组解的判定）的唯一工具；伴随与逆是第 5 讲（A^* 的特征值）的常客。

---

12. 速查卡 • 陷阱清单

12.1 速记十二条

1. **不可交换、不可消去**；$AB=O$ 推不出 $A=O$ 或 $B=O$；
2. 三条反序律：$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$、$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$、$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$；

3. $|kA| = k^n|A|$ ； $|A+B|$ **无公式**;
4. A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow$ 列无关 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解;
5. **凑** $XY = E$ 是抽象求逆的唯一入口（$A + B = AB \Rightarrow (A-E)(B-E) = E$ ）；
6. $A^* = |A|A^{-1}$ ； $|A^*| = |A|^{n-1}$ ； $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ ；
7. $r(A^*)$ ：满秩 → n ；差一 → 1；差二 → 0;
8. **左行右列**：左乘初等矩阵作行变换，右乘作列变换;
9. 秩十条：$r(AB) \leq \min$ ； Sylvester $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ ； $AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$ ；
10. $r(A) = r(A^{\mathrm{T}}A) = r(AA^{\mathrm{T}})$ ；
11. 分块：对角相加、三角不减、$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 秩不变、$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = r(A+B) + r(A-B)$ ；
12. 秩 1 矩阵：$A^k = (\operatorname{tr} A)^{k-1}A$ 。

12.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
把 $(A+B)^2$ 展开成 $A^2 + 2AB + B^2$	只有 $AB = BA$ 时才对
用 $AB = AC$ 消去 A	必须 A 可逆
认为 $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$	**无此公式**，用提公因子
$\|kA\|$ 写成 $k\|A\|$	n 阶时为 $k^n\|A\|$
$(kA)^*$ 写成 k^nA^*	是 $k^{n-1}A^*$
求逆时混用列变换	求逆**只用行变换**（或用竖排作列变换）
把 $E_{ij}(k)A$ 当成"第 i 行加到第 j 行"	是"第 j 行乘 k 加到第 i 行"
认为 $\|A\| = \pm 1$ 就是正交矩阵	只是必要条件
认为"等价"蕴含"相似"	等价只管同秩
分块三角的逆漏掉交叉块	两个交叉块：$-B^{-1}CA^{-1}$ 与 $-A^{-1}CB^{-1}$ ，位置别放反
秩 1 矩阵的幂写成 $A^k = (\operatorname{tr} A)^k A$	是 $(\operatorname{tr} A)^{k-1}A$

> **下一步**：本讲不出习题。直接进入 线性代数-第3讲-向量/01-考点手册，那里的题会用到本讲的秩不等式、伴随公式与分块结论。