概率论 第5讲 · 大数定律与中心极限定理 · 试题

> **用法**：先过 01-考点手册，再限时 70 分钟做本卷，最后对 03-解析。
> **来源记号**：🟧 真题库第 19 章 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。标「真题骨架」的题与真题同结构，**数字全部原创**，做完可直接回刷真题原题。
> **难度**：A ★☆☆ · B ★★☆ · C ★★★。

A 组 · 基础（直接套用，★☆☆）

1. 【依概率收敛】设随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足

$$P\left\{X_n=\frac{1}{n}\right\}=1-\frac{1}{n},\qquad P\{X_n=n\}=\frac{1}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

（Ⅰ）证明 $X_n \xrightarrow{P} 0$；

（Ⅱ）求 EX_n，并说明它是否收敛于 0。由此可得什么结论？

2. 【切比雪夫不等式】设随机变量 X 的 $EX=5$，$DX=2$。用切比雪夫不等式估计：

（Ⅰ）$P\{|X-5|\geq 4\}$ 的上界；

（Ⅱ）$P\{|X-5|<4\}$ 的下界。

3. 【二项 + 切比雪夫】设 $X\sim B(1000,0.5)$。用切比雪夫不等式估计 $P\{450<X<550\}$ 的下界。

4. 【辛钦大数定律的应用】将一枚均匀骰子重复投掷 n 次，X_i 表示第 i 次掷出的点数，$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。当 $n \to \infty$ 时，$\bar{X}$ 依概率收敛于何值？说明依据。

5. 【辛钦大数定律的条件】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立。根据辛钦大数定律，当 $n \to \infty$ 时 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于数学期望，只要 $\{X_n\}$（ ）。

（A）有相同的数学期望　（B）服从同一离散型分布　（C）服从同一泊松分布　（D）服从同一连续型分布

6. 【中心极限定理】设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立同分布，$EX_i = 1$，$DX_i = 4$。用中心极限定理求 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 120\right\}$ 的近似值（用 Φ 表示）。

B 组 • 中等（多步计算，★★☆）

7.【真题骨架 2022•9 🟧】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，$EX_1 = 0$，$EX_1^2 = 1$，$EX_1^4 = 5$。令 $Y_i = X_i^2$。

（Ⅰ）求 EY_i 与 DY_i；

（Ⅱ）用切比雪夫不等式估计 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1\right| \geq \varepsilon\right\}$ 的上界。

8. 【反解样本量】某试验中随机变量 X 的 $EX = 20$，$DX = 9$。欲使 n 次独立重复观测的样本均值 $\bar{X}$ 满足

$$P\{|\bar{X} - 20| < 1\} \geq 0.9,$$

用切比雪夫不等式估计 n **至少**应取多少。

9.【中心极限定理 · 应用】某生产线每件产品重量随机，平均 10 kg、标准差 0.5 kg。一辆载重 1000 kg 的货车承运，问**最多**装多少件可保证**不超载**的概率大于 0.977？（$\Phi(2)=0.977$）

10. 【真题骨架 **2020•8** 🟧】设 $X_1, X_2, \cdots, X_{400}$ 独立同分布，且 $P\{X_i=0\}=P\{X_i=1\}=\frac{1}{2}$。用中心极限定理求 $P\left\{\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 210\right\}$ 的近似值（用 Φ 表示）。

11. 【真题骨架 **2025•9** 🟧】设 $X_1, X_2, \cdots, X_{300}$ 相互独立，均服从 $B(1, 0.01)$，令 $T = \sum_{i=1}^{300} X_i$。利用泊松近似求 $P\{T \leq 1\}$ 的近似值。

12. 【切比雪夫 + 协方差】设 X, Y 满足 $EX = EY$，$DX = DY = 1$，相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$。用切比雪夫不等式估计 $P\{|X - Y| \geq 4\}$ 的上界。

C 组 · 拔高（综合与证明，★★★）

13. 【切比雪夫大数定律的条件辨析】设 $\{X_n\}$ 相互独立，X_n 服从参数为 n 的指数分布（记为 $X_n \sim E(n)$）。下列随机变量序列中，**不**服从切比雪夫大数定律的是（ ）。

(A) $X_1, \dfrac{1}{2}X_2, \cdots, \dfrac{1}{n}X_n, \cdots$　　(B) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

(C) $X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　　(D) $X_1, 2^2X_2, \cdots, n^2X_n, \cdots$

14. 【切比雪夫大数定律的证明】设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ **两两不相关**，且存在常数 C 使 $DX_i \leq C\ (i = 1, 2, \cdots)$。证明：对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

15. 【中心极限定理 · 反解 n】某型号零件寿命 X_i 独立同分布，平均寿命 100 小时、标准差 10 小时。求最小的 n，使 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 10000\right\} \geq 0.95$。 $(\Phi(1.645)=0.95)$

16. 【综合辨析】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，$EX_i = \mu$、$DX_i = \sigma^2 \in (0, +\infty)$，$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。

（Ⅰ）用切比雪夫不等式证明 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$；

（Ⅱ）用中心极限定理写出 $P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\}$ 的近似表达式（用 Φ 表示），并说明当 $n \to \infty$ 时它趋于 1；

（Ⅲ）比较（Ⅰ）（Ⅱ）两种估计：哪一个更精确？各自需要什么条件？

> **做完对答案** → 03-解析。