概率论 第3讲 · 多维随机变量及其分布 · 试题

> **用法**：先过一遍 01-考点手册，再**限时**做本卷，最后对 03-解析。
> **来源记号**：🟧 真题库第 17 章 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。标「真题骨架」的题与真题同结构，做完可刷真题原题。
> **难度**：A ★☆☆ · B ★★☆ · C ★★★。

A 组 · 基础（识别与直接计算，★☆☆）

1. 【离散型 · 联合→边缘→独立性 🟦02】设 (X,Y) 的联合分布律为

$X\backslash Y$	**0**	**1**	**2**
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.1

（Ⅰ）求 X,Y 的边缘分布律；（Ⅱ）判断 X 与 Y 是否相互独立。

2. 【二维均匀分布 🟦01】设 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ 上服从均匀分布。

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；（Ⅱ）求 $P\{X+Y\le 1\}$。

3. 【边缘密度 + 独立性 🟦02】设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\,xy, & 0<x<1,\ 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（Ⅰ）求 c；（Ⅱ）求 $f_X(x),f_Y(y)$；（Ⅲ）判断 X,Y 是否独立。

4. 【条件概率密度 🟦03】设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $f_X(x)$；（Ⅱ）求条件密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$；（Ⅲ）求 $P\{Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{4}\}$。

5. 【卷积 · 和的分布 🟦05】设 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$，X 与 Y 相互独立，$Z=X+Y$。求 $f_Z(z)$。

6. 【概念辨析 · 独立与不相关 🟦04】设 X,Y 为随机变量，则下列命题**正确**的是（ ）

- (A) 若 X,Y 都服从正态分布且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，则 X,Y 相互独立；
- (B) 若 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 不相关与相互独立等价；
- (C) 若 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，则 X,Y 一定相互独立；
- (D) 若 X,Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 可以不为 0。

B 组 • 中等（多步计算，★★☆）

7. 【商分布 🟦05】设 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim U(0,1)$ 且相互独立，$Z = \dfrac{Y}{X}$。求 $f_Z(z)$ 及 $P\{Z > 1\}$。

8. 【连续型独立性 🟦03】设 (X,Y) 在单位圆 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上服从均匀分布。（Ⅰ）求 $f_X(x)$；（Ⅱ）判断 X,Y 是否独立。

9. 【积分布 🟦05】设 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim U(0,2)$ 且相互独立，$Z = XY$。求 $f_Z(z)$。

10. 【混合型 · 和 🟦05】设 X 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y\sim U(0,1)$，$X$ 与 Y 相互独立，$Z=X+Y$。求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 与密度 $f_Z(z)$。

11. 【不相关但不独立 🟦04】设 $X \sim U(-1,1)$，$Y = X^2$。求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}，并判断 X, Y 是否独立。

12. 【最值分布 🟩】设 X, Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，$Z = \max(X, Y)$。求 Z 的分布函数与概率密度。

13. 【二维正态综合 🟩】设 $(X,Y)\sim N(1,2;1,4;0.5)$。（Ⅰ）写出 X,Y 的边缘分布；（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与 $D(X+Y)$；（Ⅲ）求 $E(Y\mid X=x)$。

14. 【取点分段 · 几何概型 🟦07】在区间 $(0,1)$ 上随机取一点，将区间分成两段，较短的一段长度为 X。求 X 的概率密度。

C 组 · 拔高（综合与辨析，★★★）

15. 【二维均匀 + 离散化 + 分布函数法 · **真题骨架 2016•22** 🟧】设 (X,Y) 在三角形区域 $D=\{(x,y)\mid 0<y<x<1\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & Y\le \dfrac{X}{2}\\[2mm] 0, & Y>\dfrac{X}{2}\end{cases}$$

（Ⅰ）写出 $f(x,y)$；（Ⅱ）求 $P\{U=1,\,X\le x\}$，并判断 U 与 X 是否独立；（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 与密度 $f_Z(z)$。

16. 【条件均匀分布 → 相关系数 · **真题骨架 2022•10 / 2024•9** 🟧】设 $X \sim U(0,1)$，在 $X = x$ 条件下 $Y \sim U(0,x)$。求相关系数 ρ_{XY}。

17.【混合正态 · 真题骨架 2020•22 🟧】设 X_1, X_2, X_3 相互独立，$X_1, X_2 \sim N(0,1)$，且 $P\{X_3 = 1\} = P\{X_3 = -1\} = \frac{1}{2}$。令

$$Y = \frac{1+X_3}{2}X_1 + \frac{1-X_3}{2}X_2.$$

（Ⅰ）求 (X_1, Y) 的分布函数 $F(x,y)$（用标准正态分布函数 Φ 表示）；（Ⅱ）证明 $Y \sim N(0,1)$。

18. 【圆形区域密度 + 函数分布 · **真题骨架 2023•22** 🟧】设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（Ⅰ）求常数 c；（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$；（Ⅲ）判断 X 与 Y 是否独立；（Ⅳ）求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

19. 【雅可比行列式变换法 · 视频推荐 🟦05/06】设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $U=X+Y$，$V=\dfrac{X}{X+Y}$。

（Ⅰ）用**雅可比行列式变换法**求 (U,V) 的联合密度 $f_{UV}(u,v)$；

（Ⅱ）判断 U 与 V 是否独立，并写出各自的分布（U 服从什么分布、V 服从什么分布）。