概率论 第3讲 · 多维随机变量及其分布 · 试题（中高难度卷）

> **定位**：本章**只收 B / C 两档**（中等 + 拔高），基础题见 02-试题 的 A 组。题号 1–12 **独立成卷**。
> **用法**：先过 01-考点手册，再限时 100 分钟做本卷，最后对 06-解析-中高难度。
> **来源记号**：🟧 真题库第 17 章 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。标「真题骨架」的题与真题同结构，**数字与区域全部原创**，做完可直接回刷真题原题。
> **难度**：B ★★☆ · C ★★★。

B 组 · 中等（多步计算，★★☆）

1. 【离散型函数分布 · **填缺口**】设 (X,Y) 的联合分布律为

$X\backslash Y$	**0**	**1**
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

（Ⅰ）求 X,Y 的边缘分布律；（Ⅱ）判断 X 与 Y 是否相互独立；（Ⅲ）求 $Z=X+Y$ 的分布律。

2.【正态差的分布 · 真题骨架 2019•8 🟧】设 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(2,9)$。

（Ⅰ）写出 $X-Y$ 服从的分布；

（Ⅱ）求 $P\{X>Y\}$（用标准正态分布函数 Φ 表示）；

（Ⅲ）若改为 X,Y 相互独立且**同分布** $N(\mu,\sigma^2)$，问 $P\{|X-Y|<2\}$ 是否与 μ 有关？是否与 σ^2 有关？说明理由。

3.【条件密度 + 条件期望 · 真题骨架 2024•9 🟧】设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\,xy, & x>0,\ y>0,\ x+y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（Ⅰ）求常数 c；

（Ⅱ）求 $f_X(x)$ 与条件密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$；

（Ⅲ）求 $E(Y\mid X=x)$ 与 $E(Y)$。

4. 【商的分布 · **真题骨架 2021•22** 🟧】设 $X \sim U(0,1)$，Y 服从参数为 1 的指数分布，X 与 Y 相互独立，$Z = \dfrac{Y}{X}$。求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$。

5. 【非矩形域上的均匀分布 🟦02】设 (X,Y) 在区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$$

上服从均匀分布。

（Ⅰ）写出 $f(x,y)$；（Ⅱ）求 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$；（Ⅲ）判断 X 与 Y 是否相互独立；（Ⅳ）求 $P\{X>Y\}$。

6.【离散 × 连续 的乘积 · **真题骨架 2019•22** 🟧】设 $X \sim U(0,1)$，离散型随机变量 Y 满足 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$ $(0<p<1)$，且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=XY$。

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（Ⅲ）p 取何值时 X 与 Z 不相关？

（Ⅳ）X 与 Z 是否相互独立？

7. 【二维正态的线性组合 🟩】设 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-0.5)$。

（Ⅰ）写出 $X+Y$ 服从的分布；

（Ⅱ）求 $D(X-Y)$；

（Ⅲ）求 $\mathrm{Cov}(X+Y,\ X-Y)$，并判断 $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否相互独立。

C 组 · 拔高（综合与辨析，★★★）

8. 【一般二维函数联合分布 · 雅可比行列式 🟦05/06】设 X, Y 相互独立且都服从 $U(0,1)$，令 $U = X+Y$，$V = X-Y$。

（Ⅰ）用**雅可比行列式变换法**求 (U,V) 的联合密度 $f_{UV}(u,v)$，写出支撑集并说明它在 uOv 平面上的形状；

（Ⅱ）求 $f_{X+Y}(u)$，并说明 $X+Y$ 服从什么分布；

（Ⅲ）判断 U 与 V 是否相互独立。

9.【顺序统计量（最值）🟩】设 X,Y 相互独立且都服从 $U(0,1)$，令 $U=\min(X,Y)$，$V=\max(X,Y)$。

（Ⅰ）求 (U,V) 的联合密度 $f_{UV}(u,v)$；

（Ⅱ）求 $f_U(u)$ 与 $f_V(v)$；

（Ⅲ）判断 U 与 V 是否相互独立，并求 $E(U)$、$E(V)$。

10. 【卷积 · 分段和分布 🟦05】设 $X \sim U(0,1)$，Y 服从参数为 1 的指数分布，X 与 Y 相互独立，$Z = X + Y$。求 $f_Z(z)$，并验证它在 $z = 1$ 处连续。

11. 【条件分布 → 相关系数 · **真题骨架 2022•10** 🟧】设 $X \sim U(0,1)$，在 $X = x$ 的条件下 $Y \sim U(x,\, 2x)$。求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}。

12. 【应用建模 · **真题骨架 2025•22** 🟧】某设备由 A、B 两个元件组成，两元件寿命 X, Y（单位：千小时）相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布。分别考虑两种连接方式：

（Ⅰ）**串联**（任一元件损坏则整机失效），系统寿命 $T_1 = \min(X, Y)$。求 $f_{T_1}(t)$ 与 $E(T_1)$；

（Ⅱ）**并联**（两个都损坏才失效），系统寿命 $T_2 = \max(X, Y)$。求 $f_{T_2}(t)$ 与 $E(T_2)$；

（Ⅲ）若要求系统**平均寿命不低于** $\dfrac{1.5}{\lambda}$（千小时），哪一种方案达标？说明理由。