概率论 第3讲 · 中高难度卷 · 解析

> 每题含 **答案 / 思路 / 易错点**；标「真题骨架」的题给出对应真题。

B 组 · 中等

1.（Ⅰ）行和、列和：

$X\backslash Y$	**0**	**1**	$p_{i\cdot}$
0	0.2	0.3	**0.5**
1	0.4	0.1	**0.5**
$p_{\cdot j}$	**0.6**	**0.4**	1

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$。

（Ⅱ） 取 $p_{00}=0.2$，而 $p_{0\cdot}p_{\cdot 0}=0.5\times 0.6=0.3\neq 0.2$，故 X **与** Y **不相互独立。**

（Ⅲ） $Z=X+Y$ 只取 $0,1,2$，按对角求和：

$$P\{Z=0\}=p_{00}=0.2,\quad P\{Z=1\}=p_{01}+p_{10}=0.3+0.4=0.7,\quad P\{Z=2\}=p_{11}=0.1.$$

$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\end{pmatrix}$$

> **思路**：离散"和的分布"= 沿**反对角线**求和（$X+Y=k$ 的那条线）。
> **易错点**：X,Y **不独立**不影响求和的分布——求 Z 的分布律**永远只用联合表**，与独立性无关。

2.（Ⅰ）独立正态的差仍正态，均值相减、方差相加：

$$X-Y\sim N\big(1-2,\ 4+9\big)=N(-1,\ 13).$$

（Ⅱ）

$$P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=1-\Phi\left(\frac{0-(-1)}{\sqrt{13}}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\approx 0.391.$$

（Ⅲ） 同分布时 $X-Y\sim N(0,\ 2\sigma^2)$，故

$$P\{|X-Y|<2\}=\Phi\left(\frac{2}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)-1.$$

结果里**不含** μ、**含** σ $\Longrightarrow$ **与** μ **无关，与** σ^2 **有关**（即真题 2019·8 的选项 A）。

思路（中心化）：$X-Y$ 的分布只由**差的均值**（0）与**差的方差**（$2\sigma^2$）决定；$|X-Y|<2$ 是关于 $X-Y$ 的**对称区间**概率，只依赖 $2\sigma^2$。
易错点：$D(X-Y)=DX+DY$（**独立才可加**），不是 $DX-DY$；求 $P\{X>Y\}$ 时别忘减均值 -1 已含在里面。

3.（Ⅰ）

$$\iint_D cxy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^1\int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = c\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = c\cdot\frac{1}{2}B(2,3) = c\cdot\frac{1}{24}=1 \;\Rightarrow\; \boxed{c=24}$$

（Ⅱ） D 是三角形 $x+y<1$，故

$$f_X(x)=\int_0^{1-x}24xy\,\mathrm{d}y = 12x(1-x)^2 \quad (0<x<1),$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{24xy}{12x(1-x)^2}=\frac{2y}{(1-x)^2} \quad (0<y<1-x).$$

（Ⅲ）

$$E(Y\mid X=x)=\int_0^{1-x} y\cdot\frac{2y}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}=\frac{2(1-x)}{3}.$$

再用**全期望**（对 x 求平均）：

$$E(Y)=E\big[E(Y\mid X)\big]=\int_0^1\frac{2(1-x)}{3}\cdot 12x(1-x)^2\,\mathrm{d}x=8\int_0^1 x(1-x)^3\,\mathrm{d}x=8B(2,4)=8\times\frac{1}{20}=\frac{2}{5}.$$

思路：条件密度型问题三步走——**先定域（$0<y<1-x$）→ 再写条件密度 → 最后算** $E(Y\mid X=x)$；求无条件期望用**全期望公式**，比直接二重积分省一半功夫。
易错点：区域是**三角形**不是矩形，内层上限是 $1-x$；$B(2,4)=\dfrac{1!\,3!}{5!}=\dfrac{1}{20}$。

4. $f_{XY}(x,y)=1\cdot e^{-y}$（$0<x<1,\ y>0$）。用商的密度公式（其 $|x|$ 即雅可比）：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,zx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,e^{-zx}\,\mathrm{d}x \quad (z>0).$$

两次分部积分（或用 $\int_0^1 xe^{-zx}\mathrm{d}x=\dfrac{1-(1+z)e^{-z}}{z^2}$）：

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1-(1+z)e^{-z}}{z^2}, & z>0\\[2mm] 0, & z\le 0\end{cases}}$$

自检：$z \to 0^+$ 时分子 $\sim \dfrac{z^2}{2}$，故 $f_Z \to \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ ✓

> **思路**：商 $Z = Y/X$ 取辅助变量 $V = X$，$|J| = |x|$，故公式里出现 $|x|$；本题也可用"先求 F_Z 再求导"：$P\{Y \le zX\} = \int_0^1 (1 - e^{-zx})\mathrm{d}x$，求导结果相同。
> **易错点**：支撑集 $z > 0$（公式里 e^{-zx} 的收敛要求 $z > 0$，与 $Y > 0, X > 0$ 一致）；不要漏掉分母 z^2。

5.（Ⅰ）$S_D = \dfrac{\pi}{2}$（上半圆），故

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（Ⅱ）

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1),$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \quad (0 < y < 1).$$

（Ⅲ） $f_X(x) f_Y(y) = \dfrac{8}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \ne \dfrac{2}{\pi} = f(x,y)$，且取值区域是**半圆**（非矩形），故 X, Y **不相互独立。**

(Ⅳ) 极坐标下 D 对应 $\theta \in [0, \pi]$。而

$$x > y \iff \cos\theta > \sin\theta \iff \theta < \frac{\pi}{4} \quad \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

故 $\{x > y\} \cap D$ 是扇形 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$，面积 $\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8}$。

$$P\{X > Y\} = \frac{S_{\{x>y\}\cap D}}{S_D} = \frac{\pi/8}{\pi/2} = \frac{1}{4}.$$

> **思路**：均匀分布求概率 = **面积比**；区域带圆就用**极坐标数角度**，比硬积分快得多。
> **易错点**：上半圆的面积是 $\pi/2$ 不是 π；$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 那半扇形里 $x < 0 \le y$，也算进 $\{x < y\}$ 的补集。

6.（Ⅰ）$Z = XY$ 分两种情形：

- $Y = 1$（概率 $1 - p$）：$Z = X \sim U(0,1)$，密度 1 落在 $(0,1)$；
- $Y = -1$（概率 p）：$Z = -X$，密度 1 落在 $(-1,0)$。

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-p, & 0<z<1\\ p, & -1<z<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

自检：$\int_{-1}^{0} p\,\mathrm{d}z+\int_{0}^{1}(1-p)\,\mathrm{d}z=p+(1-p)=1$ ✓

(Ⅱ) $EX=\dfrac{1}{2}$，$EX^2=\dfrac{1}{3}$，$EY=1\cdot(1-p)+(-1)\cdot p=1-2p$。

$$E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1-2p}{2},\qquad E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\frac{1-2p}{3},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=\frac{1-2p}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2p}{2}=\frac{(1-2p)}{12}.$$

(Ⅲ) $\mathrm{Cov}(X,Z)=0\iff 1-2p=0\iff \boxed{p=\dfrac{1}{2}}$。

(Ⅳ) X **与** Z **不相互独立**。理由：给定 $X=x$，$Z=xY$ 只取 $\pm x$ 两个值，条件分布**依赖** x（如 $P\{Z=x\mid X=x\}=1-p$，$P\{Z=-x\mid X=x\}=p$），故不独立。

> **易错点**：Z 的密度是**两块拼接**（正半轴权重 $1-p$、负半轴权重 p），不是常规光滑密度；求 $E(XZ)$ 必须用**独立性**拆成 $E(X^2)E(Y)$。
> **结论**：本题与真题同构——**"不相关"可以靠调参数凑出来，但"独立"凑不出来。**

7.（Ⅰ） $\sigma_1=1,\ \sigma_2=2,\ \rho=-0.5$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2=-1$。

$$D(X+Y)=DX+DY+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4+2(-1)=3\ \Rightarrow\ X+Y\sim N(0,3).$$

(Ⅱ) $D(X-Y)=DX+DY-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4-2(-1)=7$。

(Ⅲ) 线性组合的协方差（交叉项抵消）：

$$\mathrm{Cov}(X+Y,\ X-Y)=DX-DY=1-4=-3\neq 0.$$

因 $(X+Y,\ X-Y)$ 仍是 (X,Y) 的线性变换，**仍服从二维正态**，对二维正态"不相关 $\iff$ 独立"，故 $X+Y$ **与** $X-Y$ **不相互独立**。

> **易错点**：$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2=-1$（**负号别丢**），直接导致 $D(X+Y)=3$ 而非 5。
> **通用结论**：二维正态下 —— 线性组合仍联合正态；**不相关即独立**；$\mathrm{Cov}(aX+bY,\,cX+dY)=ac\,DX+(ad+bc)\,\mathrm{Cov}+bd\,DY$。

C 组 · 拔高

8.（Ⅰ）反解

$$u=x+y,\quad v=x-y \implies x=\frac{u+v}{2},\qquad y=\frac{u-v}{2}.$$

雅可比行列式（**反解的行列式**）：

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12\end{vmatrix}=-\frac14-\frac14=-\frac12,\qquad |J|=\frac12.$$

定义域一起变换：$0<x<1,\ 0<y<1$ 变成 $0<u+v<2$ 且 $0<u-v<2$，即

$$|v|<u<2-|v| \iff |v|<1.$$

于是

$$f_{UV}(u,v)=\begin{cases}\dfrac12, & |v|<u<2-|v|\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

支撑集形状：由四条边 $u+v=0,\ u+v=2,\ u-v=0,\ u-v=2$ 围成的**菱形**（正方形旋转 45°），顶点为

$$(0,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (1,-1).$$

（Ⅱ） 对 v 积分：

- $0<u<1$：$v\in(-u,u)$，长度 $2u \implies f_{X+Y}(u)=2u\cdot\dfrac12=u$；
- $1\le u<2$：$v\in\big(-(2-u),\,2-u\big)$，长度 $2(2-u) \implies f_{X+Y}(u)=2-u$。

$$f_{X+Y}(u)=\begin{cases}u, & 0<u<1\\ 2-u, & 1\le u<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(\textbf{辛普森三角形分布})$$

自检：$\displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}u+\int_1^2(2-u)\,\mathrm{d}u=\frac12+\frac12=1$ ✓

（Ⅲ）U 与 V 不相互独立。f_{UV} 在菱形上恒为 $\dfrac12$（常数），而 $f_U(u)=u$ 在 $(0,1)$ 上并非常数，$f_U(u)f_V(v)\neq f_{UV}$，故不独立。

> **思路（雅可比三步）**：① 反解 $x=x(u,v),y=y(u,v)$；② 算 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$；③ $f_{UV}=f\cdot|J|$，**定义域一并变换**（这一步决定了菱形的四条边）。
> **易错点**：$|J|=\frac{1}{2}$ 是**常数**，很容易被误当成"f_{UV} 也是常数所以独立"——**判断独立必须比较边缘之积**，支撑集是斜菱形这一点就足以否定独立。
> **与 02-试题 第 19 题的分工**：第 19 题练"和非一一→按分支"的比值变换，本题练**一一变换 + 支撑集形状**。

9.（Ⅰ）$(U,V)=(\min,\max)$ 的取值必满足 $0<u<v<1$，且区域非矩形。用对称性（$f(u)f(v)=1$，两种排列）：

$$f_{UV}(u,v)=2!\,f(u)f(v)=2\quad(0<u<v<1).$$

自检：$\displaystyle\int_0^1\int_u^1 2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=2\int_0^1(1-u)\,\mathrm{d}u=1$ ✓

（Ⅱ）

$$f_U(u)=\int_u^1 2\,\mathrm{d}v=2(1-u)\ (0<u<1),\qquad f_V(v)=\int_0^v 2\,\mathrm{d}u=2v\ (0<v<1).$$

（Ⅲ） $f_U(u)f_V(v)=2(1-u)\cdot 2v=4v(1-u)\neq 2=f_{UV}(u,v)$，故 U **与** V **不相互独立**（支撑集是三角形 $u<v$，几何上已排除独立）。

$$E(U)=\int_0^1 u\cdot 2(1-u)\,\mathrm{d}u=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\qquad E(V)=\int_0^1 v\cdot 2v\,\mathrm{d}v=\frac{2}{3}.$$

> **思路**：n 个 iid 连续变量的顺序统计量，联合密度 $=n!\,f(x_1)\cdots f(x_n)$（限在 $x_{(1)}<\cdots<x_{(n)}$ 上）；$n=2$ 时系数就是 2。
> **巧记**：$U(0,1)$ 两样本的 $\min,\max$ 均值是 $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$——正好是 $[0,1]$ 上两个等分点的位置。

10. 卷积（对 x 积分，注意 f_X 只在 $(0,1)$ 非零）：

$$f_Z(z)=\int_0^1 f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-(z-x)}\,\mathbf{1}\{x<z\}\,\mathrm{d}x.$$

- $0<z<1$：$x\in(0,z)$，

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{x-z}\,\mathrm{d}x=\Big[e^{x-z}\Big]_0^z=1-e^{-z};$$

- $z\geq 1$：$x\in(0,1)$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{x-z}\,\mathrm{d}x=e^{-z}(e-1).$$

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}}$$

验证 $z=1$ 处连续：左极限 $1-e^{-1}=e^{-1}(e-1)=$ 右极限 ✓

自检：$\displaystyle\int_0^1(1-e^{-z})\mathrm{d}z+\int_1^{+\infty}(e-1)e^{-z}\mathrm{d}z=\left[1-e^{-1}\right]+(e-1)e^{-1}=e^{-1}+1-e^{-1}=1$ ✓

> **思路**：卷积的**分段点来自两个支撑集边界**（x 的上限取 $\min(1,z)$），本题分界点就是 $z=1$。
> **易错点**：$0<z<1$ 段的积分上限是 z（不是 1）——因为 $f_Y(z-x)$ 要求 $z-x>0$。

11. 先写联合密度：$f_X(x)=1\ (0<x<1)$，$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{1}{x}\ (x<y<2x)$，故

$$f(x,y)=\frac{1}{x}\quad(0<x<1,\ x<y<2x).$$

三个期望 + 一个混合矩：

$$E(Y\mid X=x)=\frac{x+2x}{2}=\frac{3x}{2}\ \Rightarrow\ E(Y)=E\left(\frac{3X}{2}\right)=\frac{3}{4};$$

$$E(Y^2\mid X=x)=\frac{x^2+2x^2+4x^2}{3}=\frac{7x^2}{3}\ \Rightarrow\ E(Y^2)=\frac{7}{9};$$

$$E(XY)=E\big[X\,E(Y\mid X)\big]=E\left[\frac{3X^2}{2}\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

又 $EX=\dfrac{1}{2}$，$EX^2=\dfrac{1}{3}$，$DX=\dfrac{1}{12}$；$DY=\dfrac{7}{9}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{31}{144}$。于是

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8},\qquad \rho_{XY}=\frac{1/8}{\sqrt{\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{31}{144}}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}=3\sqrt{\frac{3}{31}}\approx 0.933.$$

> **思路**：条件分布型**永远先写** $f=f_Xf_{Y|X}$；求 $E(XY)$ 用**条件期望**最快——$E(XY)=E[X\,E(Y\mid X)]$。
> **易错点**：$U(x,2x)$ 的 $E(U^2)=\dfrac{x^2+2x^2+4x^2}{3}$（均值**不一定对称**时别写错，此式只在 $a=x,b=2x$ 时代入）；分界 $x<y<2x$ 是最小支撑集，y 的上限含 x。
> **真题骨架**：🟧 2022·10 / 2024·9（条件分布 → 相关系数），本题把 $U(0,x)$ 换成 $U(x,2x)$。

12.（Ⅰ）串联 $T_1=\min(X,Y)$：

$$F_{T_1}(t)=1-P\{X>t\}P\{Y>t\}=1-\left(e^{-\lambda t}\right)^2=1-e^{-2\lambda t}\ (t>0),$$

$$\boxed{f_{T_1}(t)=2\lambda e^{-2\lambda t}\ (t>0)}\ \Longrightarrow\ T_1\sim E(2\lambda),\qquad E(T_1)=\frac{1}{2\lambda}.$$

> **结论**：独立同分布指数取 **min 仍是指数**，参数**相加**——"最短寿命"是串联系统的招牌性质。

（Ⅱ）并联 $T_2=\max(X,Y)$：

$$F_{T_2}(t)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2\ (t>0),\qquad f_{T_2}(t)=2\left(1-e^{-\lambda t}\right)\lambda e^{-\lambda t}=2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right).$$

用**期望的可加性**（$\max+\min=X+Y$）：

$$E(T_2)=E(X)+E(Y)-E(T_1)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda}.$$

（Ⅲ）门槛 $\dfrac{1.5}{\lambda}=\dfrac{3}{2\lambda}$：

$$E(T_1)=\frac{1}{2\lambda}<\frac{3}{2\lambda},\qquad E(T_2)=\frac{3}{2\lambda}\ \text{恰好达标}\ \checkmark$$

并联方案达标（且恰好取等）。

> **思路（最省力的期望算法）**：恒等式 $\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$ 两边取期望即可，**不必再做一次积分**。
> **易错点**：$E(\max)$ 不能写成 $\max(EX,EY)$；$E(\min)\ge$ 与 $\le$ 的方向记牢：串联寿命更短。
> **真题骨架**：🟧2025·22（"分段赔付额 + 复合模型"的应用建模风格），本题改为**可靠性工程**情境。

附 • 出题质量报告

一、与既有 19 题的分工（不重复号、不重复数字）

本章已被 02-试题 覆盖	本卷的定位
均匀域离散化（15）、条件均匀相关系数（16）、混合正态（17）、圆域 X^2+Y^2（18）、雅可比比值（19）	避开上述结构，改从下述**真题空档**切入

二、真题覆盖（对照 ch17 的 11 题）

真题	考法	对应题	说明
2016·22	均匀域 + 离散化 + 函数分布	5	同域精神，改为**半圆**
2017·22	混合型 $Z=X+Y$	1、10	离散型（1）+ **卷积**（10）
2018·22	$Z=XY$ + 协方差	—	已由 02-试题 第 9 题覆盖
2019•8	**正态差** $\lvert X-Y\rvert$	**2**	✅ **本卷重点补**
2019·22	离散×连续乘积 + 不相关 + 独立	6	✅ 完整复刻考法
2020·22	混合正态证明	—	已由 02-试题 第 17 题覆盖
2021·22	取点分段 + 商分布	4	商分布换分布组合（$U(0,1)$ 与 $E(1)$）
2022·10 / 2024·9	条件分布 → 相关系数	**3、11**	条件期望（3）+ 相关系数（11）
2023·22	圆域 + Cov + 独立 + 函数分布	5、7	拆到"边缘 + 独立"与"二维正态线性组合"
2025•22	**复合分布应用建模**	**12**	✅ **本卷重点补**

三、手法覆盖

离散和分布（1）、正态差（2）、条件密度与条件期望（3、11）、商分布（4）、非矩形域均匀 + 面积比（5）、离散×连续乘积（6）、二维正态线性组合与协方差（7）、**雅可比一一变换 + 菱形支撑集（8）**、**顺序统计量（9）**、**卷积分段（10）**、**min / max 与期望恒等式（12）**。

四、相对 02-试题 新填的 5 个缺口

1. 离散型二维函数分布（两离散变量之和的表格题）→ **第 1 题**；
2. $\lvert X-Y\rvert$ 正态差的完整选择题（2019·8）→ **第 2 题**；
3. 条件期望 / 全期望递推 → **第 3、11 题**；
4. 一般二维函数的联合分布（**雅可比 + 支撑集形状**）→ **第 8 题**；
5. 2025·22 式应用建模 → **第 12 题。**

> 仍**未**覆盖（留作三轮）：二维离散与连续的混合卷积（需同时用两种全概率）、二维正态的密度形式推导（ρ 的实际含义）。