概率论 第3讲 · 多维随机变量及其分布 · 考点手册

> **来源记号**：🟦 视频讲次 · 🟧 真题库第 17 章 · 🟩 参考仓库方法。
> **学习法**：先通读一遍建立框架 → 做 02-试题 → 对 03-解析 → 回本手册补齐薄弱点。

---

0. 本讲定位与学习地图

为什么重要 🟧：真题库第 17 章（多维随机变量及其分布）近十年 **11 题、105 分**，概率各章之最，且**年年一道 11–12 分解答题**，结构高度固定：

> **二维密度/分布 → 求某个函数的分布 → 顺带求协方差 / 判断独立性。**

六讲次 → 本手册章节映射 🟦：

视频讲次	本手册章节
01 n 维随机变量及其分布函数	§1
02/03 两类二维变量（离散/连续）	§2、§3
04 随机变量的相互独立性	§4
05/06 多维随机变量函数的分布	**§5（核心，含雅可比）**
07 综合题举例	§6、§7

一句话主线：**降维靠积分（边缘）、升级靠全概率/卷积（函数分布）、判独立看乘积、算相关看协方差。**

---

1. 二维随机变量与联合分布函数 🟦01

1.1 概念

设 X, Y 是定义在**同一样本空间**上的随机变量，称 (X, Y) 为**二维随机变量**（二维随机向量）。n 个即为 n 维。

1.2 联合分布函数

$$F(x, y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}.$$

几何意义：平面上以 (x, y) 为**右上角**、向 $-\infty$ 张开的**无界左下矩形**的概率。

1.3 四条性质（与一维对应，多一条）

1. **单调不减**：对 x、对 y 各自单调不减；
2. **右连续**：$F(x+0,y)=F(x,y)$，$F(x,y+0)=F(x,y)$；
3. **有界性**：$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；
4. **非负矩形增量（二维特有）**：

$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

> **用途**：判断"某二元函数能否当联合分布函数"。反例：$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\ge 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$ **不合法**——它虽满足前三条，但在 $x_1=-1,x_2=1,y_1=-1,y_2=1$ 上矩形增量为 $F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)=1-1-1+0=-1<0$。

1.4 边缘分布函数 🟩

$$F_X(x)=F(x,+\infty),\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y).$$

口诀（仓库原话）：**求谁不积谁，不积先定限，限内画条线，先交写下限，后交写上限。**

---

2. 二维离散型随机变量 🟦02 🟧2016•8

2.1 联合分布律

$$p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_j\},\quad i,j=1,2,\cdots$$

充要条件：$p_{ij}\ge 0$ 且 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$。

2.2 三类分布（表格记忆法）

把 p_{ij} 写成矩形表：

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$				
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	1

- **边缘**：行和 $p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$、列和 $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$（表格最右列、最下行）；

- **条件**：$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$（要求 $p_{\cdot j}>0$），$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$；
- **区域概率**：$P\{(X,Y)\in G\}=\sum_{(x_i,y_j)\in G} p_{ij}$。

2.3 常见模型

- **放球模型**🟩：n 封信投 m 个信箱，(X_1,X_2) 为前两箱信封数，联合分布为多项分布型。
- **多项分布**🟧2016·8：n 次独立试验，X_i 为第 i 类结果次数，$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=-np_ip_j\ (i\neq j)$，$\rho_{X_1X_2}=-\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$。

---

3. 二维连续型随机变量 🟦02/03 🟧2016•22、2021•22、2023•22

3.1 联合概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

充要条件：$f\geq 0$，$\iint_{\mathbb{R}^2} f=1$。改有限个点的值仍是密度。

- **区域概率**：$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（**画图定限是全部功夫**）；
- 在 f 连续点处 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$。

3.2 边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

> ⚠️ **联合决定边缘，边缘不决定联合**：不同联合可共享同一对边缘。
>
> - **矩形域 + 密度可分离 $\Longrightarrow$ 一眼独立**；
> - **非矩形域 $\Longrightarrow$ 一眼不独立。**

3.3 条件密度

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\ (f_X(x)>0),\qquad f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

乘法公式：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x\mid y)$。

> **求条件密度的标准动作**：① 先求 $f_X(x)$；② 把 $f(x,y)$ 中 x 视为常数除以 $f_X(x)$；③ 写清 y 的**条件范围**。

3.4 二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

几何概型的升维：**概率 = 面积占比。**

3.5 二维正态分布（深挖）🟩

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho),\quad -1<\rho<1.$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

五条必背性质：

1. 边缘：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；
2. $\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$ 就是相关系数；
3. **任意线性组合** $aX+bY$（a,b 不全为 0）仍服从正态；
4. 条件分布仍是正态：$E(Y\mid X=x)=\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$；
5. **不相关** $\Longleftrightarrow$ **独立**（二维正态专属特权）。

> **识别技巧**🟩：看到 $F(x,y)=\Phi(2x+1)\Phi(2y-1)$ 这种"两个一维分布函数之积"，先标准化 $\Phi\left(\dfrac{x-(-\frac12)}{1/2}\right)\Phi\left(\dfrac{y-\frac12}{1/2}\right)$，立刻读出 $(X,Y)\sim N\left(-\frac12,\frac12;\frac14,\frac14;0\right)$。

---

4. 随机变量的相互独立性 🟦04 🟧2016•22、2019•22、2023•22

4.1 定义（三等价）

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\iff f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\iff p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}.$$

4.2 性质

- 独立 $\Longrightarrow$ $f(X)$ 与 $g(Y)$ 独立；
- 独立 $\Longrightarrow$ 任意子组独立；独立 $\Longrightarrow$ $E(XY)=EX\cdot EY$，$D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY$；
- 独立同分布可加：$B(n,p)+B(m,p)=B(n+m,p)$；$P(\lambda_1)+P(\lambda_2)=P(\lambda_1+\lambda_2)$；$N(\mu_1,\sigma_1^2)+N(\mu_2,\sigma_2^2)=N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

4.3 判断独立性三步走（考场流程）

1. 求 $f_X(x)$、$f_Y(y)$；
2. **看取值区域**——是不是**矩形**（非矩形基本可判不独立）；
3. 验 $f(x,y) \overset{?}{=} f_X(x)f_Y(y)$。

> **特例**：圆形域、三角形域、$0<y<x$ 型区域 $\Longrightarrow$ 一律不独立（除非密度恰可分离且区域矩形）。

4.4 独立 vs 不相关（高频概念题） 🟧2019•22、2025•8

$$\text{独立} \Longrightarrow \text{不相关 } (\mathrm{Cov}=0); \qquad \text{不相关} \not\Longrightarrow \text{独立（一般情形）}.$$

唯一例外：**二维正态**时二者等价。

经典反例：$X\sim U(-1,1)$，$Y=X^2 \Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 但**不独立**（Y 是 X 的偶函数）。

---

5. 多维随机变量函数的分布 ★核心 🟦05/06 🟧2017•22、2018•22、2019•8、2019•22、2020•22、2021•22

5.0 三条总路线（选择依据）

路线	何时用	关键
① **分布函数法（定义法）**	给**联合密度**、求**单个函数**的分布	$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g\le z} f\,\mathrm{d}\sigma$，再求导
② **雅可比变换法**	视频推荐 · 求**多个新变量**的联合密度 / 函数分布	反解 + $f_{UV}=f\cdot\lvert J\rvert$
③ **卷积公式**	X,Y **独立**、求 $Z=X\pm Y$ 等	把二维密度降成一重积分

> **选择口诀**：**单个函数 → 定义法；多变量/显式变换 → 雅可比；独立且求和差 → 卷积分。**

5.1 分布函数法（通法，必掌握）

$$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{\{(x,y):\,g(x,y)\le z\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad f_Z(z)=F_Z'(z).$$

四步：① 写 $F_Z(z)$；② 画图定 $g\le z$ 的区域；③ 按 z 分段积分；④ 对 z 求导。

> **优点**：万无一失（第 15、18 题用它）；**缺点**：分段讨论繁。

5.2 雅可比行列式变换法（视频推荐，重点补） 🟦05/06

二维变换定理：设 (X,Y) 的联合密度为 $f_{XY}(x,y)$，变换

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y)$$

满足：① 在 (X,Y) 的取值区域 D 上存在**唯一的逆变换** $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$；② 有连续偏导数；③ 雅可比行列式 $J\neq 0$。则 (U,V) 的联合密度为

$$\boxed{f_{UV}(u,v)=f_{XY}\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\cdot|J|}$$

其中

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},$$

取值区域 D' 是 D 在变换下的**像**（把 D 的边界用 u,v 表示）。

求单个函数 $Z=g(X,Y)$ 的密度 —— 增补变量三步法：

1. **增补**一个辅助变量（常取 $V=X$ 或 $V=Y$），凑成二维——变换；
2. 求联合密度 $f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))|J|$；
3. 对辅助变量积分得**边缘**：$f_Z(z)=\displaystyle\int f_{UV}(z,v)\,\mathrm{d}v$。

三条常用变换（务必记熟 J）：

目标	增补	反解	$\lvert J\rvert$	密度公式
和 $Z=X+Y$	$V=X$	$x=v,\ y=z-v$	1	$f_Z(z)=\displaystyle\int f(v,z-v)\,\mathrm{d}v$
积 $Z=XY$	$V=X$	$x=v,\ y=z/v$	$\dfrac{1}{\lvert v\rvert}$	$f_Z(z)=\displaystyle\int \frac{1}{\lvert v\rvert}f\big(v,\tfrac{z}{v}\big)\,\mathrm{d}v$
商 $Z=\dfrac{Y}{X}$	$V=X$	$x=v,\ y=zv$	$\lvert v\rvert$	$f_Z(z)=\displaystyle\int \lvert v\rvert f(v,zv)\,\mathrm{d}v$

> **验算**：以"和"为例，$x=v,\ y=z-v$；$J=\det\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$，$|J|=1$，故 $f_Z(z)=\int f(v,z-v)\mathrm{d}v$ —— 正是**卷积公式**。**雅可比法把卷积"推导"出来了**，理解后不必死记。

一一性的坑 🔴：若变换**非一一**（如 $Z=X^2$、$Z=X^2+Y^2$ 反解多值），雅可比法要**按分支求和**：

$$f_Z(z)=\sum_{\text{各分支}} f\big(x_k(z)\big)\left|\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}z}\right|.$$

否则改用**分布函数法**（第 18 题的 $Z=X^2+Y^2$ 就走定义法）。

一维版本（前置知识）：若 $Y=g(X)$ 在 X 的取值区间上**单调可导**且 $g'\neq 0$，则

$$f_Y(y)=f_X\big(x(y)\big)\cdot\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|=\frac{f_X\big(x(y)\big)}{|g'(x(y))|}.$$

> 例：$X\sim U(0,2)$，$Y=X^2$ 在 $(0,2)$ 单调，$x=\sqrt{y}$，$\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$，故 $f_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{4\sqrt{y}}\ (0<y<4)$。

极坐标变换（圆形域专用）：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$，

$$\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

> 凡"到原点距离"的函数（X^2+Y^2、$\sqrt{X^2+Y^2}$、$\sqrt{X^2+Y^2}\le z$ 的区域）一律先转极坐标。

5.3 和的分布（卷积）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x\xrightarrow{X,Y\text{ 独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

两个标准结论（背下来）：

- 两个 $U(0,1)$ 之和 → **辛普森（三角形）分布**：$f_Z(z)=z\ (0<z<1)$，$2-z\ (1\le z<2)$；
- $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 独立 $\Longrightarrow X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

5.4 差的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\,\mathrm{d}x\quad(\text{独立时}=\int f_X(x)f_Y(x-z)\,\mathrm{d}x).$$

> 正态差：$X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。**同方差正态差** $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，与 μ 无关 🟧 2019·8。

5.5 积的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\Big(x,\frac{z}{x}\Big)\mathrm{d}x\quad(\text{独立时}=\int\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\Big(\frac{z}{x}\Big)\mathrm{d}x).$$

5.6 商的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,zx)\,\mathrm{d}x\quad(\text{独立时}=\int|x|f_X(x)f_Y(zx)\,\mathrm{d}x).$$

5.7 最值分布

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),\qquad F_{\min}(z)=1-\big[1-F_X(z)\big]\big[1-F_Y(z)\big].$$

> 若 X,Y 独立同分布（分布函数 F、密度 f）：$f_{\max}(z)=2F(z)f(z)$；$f_{\min}(z)=2[1-F(z)]f(z)$。

5.8 混合型（一个离散、一个连续）——全概率公式 🟧2017•22、2020•22、2025•22

设 X 离散（$P\{X=x_i\}=p_i$）、Y 连续：

$$F_Z(z)=\sum_i p_i\,P\{g(x_i,Y)\le z\}.$$

> **本质**：把离散变量的每个取值当作一个**权重**，分别平移后加权叠加。
> **例**：$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac12$，$Y\sim U(0,1)$，$Z=X+Y\Longrightarrow F_Z(z)=\frac12F_Y(z)+\frac12F_Y(z-1)$。

5.9 混合正态（综合题常客）🟧2020•22

形如 $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$（X_3 取 0/1，$X_1,X_2\sim N(0,1)$）：
用**全概率 + Φ 的乘法**：

$$F(x,y)=\sum_k P\{X_3=k\}\,P\{X_1\le x,\ (\text{对应 }Y)\le y\}.$$

结论常是"**证明 Y 仍服从标准正态**"。

---

6. 与数字特征的耦合（本讲的"配件"）🟦07 🟧2022•10、2024•9、2025•8

- **期望的二维公式**（不必先求分布）：$E\big(g(X,Y)\big)=\sum\sum g(x_i,y_j)p_{ij}$ 或 $\iint g(x,y)f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$；$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\in[-1,1]$；
- $D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY\pm2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；
- **条件分布求相关**（🟧2022·10、2024·9）：先 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$，再算 $EX,EY,E(XY)$；
- **线性组合方差最值**（🟧2025·8）：$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;\rho)$，$a^2+b^2=1$ 时 $D(aX+bY)=1+2ab\rho$，最大值 $1+|\rho|$；
- **切比雪夫不等式**：$P\{|Z-EZ|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{DZ}{\varepsilon^2}$。

---

7. 十年真题落点地图（🟧 第 17 章 11 题）

年份·题号	分值	考法	关键动作
2016·22	11	二维均匀 + 离散化 U + $Z=U+X$ 分布函数	判独立 + 分布函数法
2017·22	11	混合型 $Z=X+Y$	全概率 + $P\{Y\le EY\}$
2018·22	11	$Z=XY$ + 协方差	积分布 + Cov
2019·8	4	正态差 $\lvert X-Y\rvert$	$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$
2019·22	11	$Z=XY$ 密度 + 不相关 + 独立性	反解两分支求和
2020·22	11	混合正态 + 证明 $Y\sim N(0,1)$	全概率 + Φ
2021·22	11	取点分段 + 商分布 $Z=Y/X$	几何概型 + 商的密度
2022·10	5	条件分布求相关系数	$Y\mid X=x\sim N(x,1)$
2023·22	12	圆形域密度 + Cov + 独立 + $Z=X^2+Y^2$	极坐标
2024·9	5	条件均匀分布 + 协方差	$f=f_X f_{Y\mid X}$
2025·22	12	复合分布 + 混合概率模型	全概率 + 复合

跨章牵连（数字特征/条件分布）：2016·8、2020·14、2021·16、2022·8、2024·10、2025·8。

8. 速查卡 • 陷阱清单

8.1 十句速记

1. **联合决定边缘，边缘不决定联合**；
2. **区域不是矩形 $\Longrightarrow$ 立刻怀疑不独立**；
3. **独立 $\Longrightarrow$ 不相关；不相关 $\nRightarrow$ 独立**（二维正态除外）；
4. **混合型 = 全概率公式**（离散变量当权重）；
5. **单个函数 → 定义法；多变量 → 雅可比；独立求和差 → 卷积**；
6. **雅可比用反解的行列式** $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$，别写成 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$（互为倒数，取绝对值不影响结果，但要对）；
7. **非一一变换要按分支求和**，否则漏项；
8. **圆形域先极坐标**，$J=r$；
9. **条件密度是对另一个变量求导/积分的商**，注意条件范围；
10. **二维正态 σ 是标准差**，代公式别把 σ^2 用错。

8.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
边缘积分上下限照抄联合定义域	**画图**取交集，分段讨论
判独立只看一个点就下"独立"结论	独立要**全部** $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$；不独立**找一个反例**即可
雅可比漏绝对值 / 符号搞反	$f_{UV}=f\cdot\lvert J\rvert$，行列式用**反解**的
$Z=X^2+Y^2$ 硬套雅可比	反解多值，**改走分布函数法**
混合型只算一半权重	全概率 $\sum_i p_i(\cdots)$，权重和必须为 1
相关系数公式分母用方差	分母是 $\sqrt{DX}\sqrt{DY}$（都是标准差之积）
正态线性组合忘了 ρ 交叉项	$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\,\mathrm{Cov}$

> **下一步**：开做 02-试题（19 题，约 95 分钟）。做完对 03-解析，把错题回挂 做题本。