概率论 第6讲 · 数理统计 · 试题

> **用法**：先过 01-考点手册，再限时 80 分钟做本卷，最后对 03-解析。
> **来源记号**：🟧 真题库第 20/21/22 章 · 🟩 参考仓库 · 🟦 视频讲次。标「真题骨架」的题与真题**同结构不同数字**，做完可直接回刷真题原题。
> **难度**：A ★☆☆ · B ★★☆ · C ★★★。

A 组 · 基础（直接套用，★☆☆，约 22 分钟）

1.【统计量与常用统计量】设总体 X 的一组样本观测值为

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 6,\quad 9.$$

（Ⅰ）求样本均值 $\bar{X}$ 、样本方差 S^2 、样本二阶中心矩 B_2 ；

（Ⅱ）设总体均值 μ 与总体方差 σ^2 **均未知**。判断下列各量哪些是**统计量**，哪些不是：$\bar{X}+\mu$ ； S^2 ；$X_1+X_2-\mu$ ； $\max\{X_1,\cdots,X_5\}$ ； $\sum_{i=1}^{5}(X_i-\mu)^2$ 。

2. 【三大分布辨析与构造】设 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 为来自总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本。判断下列统计量各服从什么分布（写出名称与自由度）；**不服从三大分布的，请说明理由**：

（Ⅰ）$Y_1 = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{6} X_i^2$；

（Ⅱ）$Y_2 = \dfrac{(X_1+X_2+X_3)^2}{12}$；

（Ⅲ）$Y_3 = \dfrac{\sqrt{3}\,X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}$；

（Ⅳ）$Y_4 = 2(X_1-X_2)^2$。

3. 【样本均值与样本方差的数字特征】设总体 X 的 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$ 均存在，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本，$\bar{X}$、S^2 为样本均值与样本方差。

（Ⅰ）求 $E\bar{X}$、$D\bar{X}$、ES^2；

（Ⅱ）说明为什么样本方差 S^2 定义为 $\dfrac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$ 而不是 $\dfrac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2$。

4. 【矩估计】设总体 X 的分布律为

$$P\{X=-1\}=2\theta,\qquad P\{X=0\}=\theta,\qquad P\{X=1\}=1-3\theta,\qquad 0<\theta<\frac{1}{3}.$$

θ 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本。求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$。

5. 【极大似然估计】设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(\theta>0\text{ 未知})$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本。求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 。

6. 【无偏性定常数】🟩 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$EX=\mu$ ，$DX=\sigma^2$ 。求常数 k ，使

$$\hat{\sigma}^2=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

为 σ^2 的**无偏估计量。**

B 组 • 中等（多步计算，★★☆，约 34 分钟）

7. 【拉普拉斯分布 · MLE + 数字特征】🟧**真题骨架 2018•23**　设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda)=\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\lambda}},\qquad x\in\mathbb{R},\quad \lambda>0\text{ 未知},$$

$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本，记 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}$。

（Ⅰ）求 $\hat{\lambda}$；

（Ⅱ）求 $E\hat{\lambda}$ 与 $D\hat{\lambda}$。

8.【次序统计量 · 最大值分布 + 无偏】🟧真题骨架 2016•23 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(\theta>0\text{ 未知}),$$

X_1,X_2,X_3 为简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$。

（Ⅰ）求 T 的概率密度 $f_T(x)$；

（Ⅱ）确定常数 a，使 aT 为 θ 的无偏估计。

9.【区间估计】🟧真题骨架 2016•14 设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，测得样本均值 $\bar{X}=12.3$。

（Ⅰ）若 $\sigma=2$ **已知**，求 μ 的置信度为 0.95 的**双侧**置信区间，以及置信度为 0.95 的**单侧置信上限**（已知 $u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.645$）；

（Ⅱ）若 σ **未知**，测得样本标准差 $S=2$，求 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间（已知 $t_{0.025}(15)=2.131$）。

10.【假设检验拒绝域】🟧真题骨架 2025•10 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,3)$ 的简单随机样本，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 。检验

$$H_0:\mu\le 2,\qquad H_1:\mu>2,$$

显著性水平为 α ，Z_α 为标准正态分布的上 α 分位数。

（Ⅰ）写出该检验的拒绝域；

（Ⅱ）若 $n=12$ ，$\alpha=0.05$ ，$Z_{0.05}=1.645$ ，求拒绝域的临界值 c 。

11.【两类错误】🟧真题骨架 2021•10 设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 为来自总体 $N(\mu,9)$ 的简单随机样本，考虑检验问题

$$H_0:\mu\le 5,\qquad H_1:\mu>5,$$

取拒绝域 $W=\{\bar{X}\ge 6\}$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

（Ⅰ）求犯**第一类错误**的概率（用 Φ 表示）；

（Ⅱ）求当 $\mu=6.6$ 时犯**第二类错误**的概率（用 Φ 表示）。

12. 【无偏性与有效性】设 X_1, X_2, X_3 为来自总体 X （$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$）的简单随机样本，考虑 μ 的三个估计量

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3),\qquad \hat{\theta}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3,\qquad \hat{\theta}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2.$$

（Ⅰ）验证三个估计量都是 μ 的无偏估计；

（Ⅱ）比较它们的有效性，指出哪一个最有效。

13.【两样本泊松 · MLE】🟧真题骨架 2022•22 设 $X_1,\cdots,X_5$ 来自参数为 λ 的泊松分布，$Y_1,\cdots,Y_4$ 来自参数为 2λ 的泊松分布，两组样本**相互独立**，$\lambda>0$ 未知。测得观测值

$$(x_1,\cdots,x_5)=(3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 5),\qquad (y_1,\cdots,y_4)=(5,\ 3,\ 7,\ 9).$$

（Ⅰ）求 λ 的极大似然估计值 $\hat{\lambda}$；

（Ⅱ）写出 $D(\hat{\lambda})$ 的表达式。

14. 【两正态总体方差比 · F 分布】🟧**真题骨架 2023•9**　设 $X_1,\cdots,X_m$ 来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ 来自总体 $N(\mu_2,3\sigma^2)$，两样本**相互独立**，S_1^2、S_2^2 分别为两样本的样本方差。求常数 c，使

$$c\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\ \sim\ F(m-1,\ n-1),$$

并写出该 F 分布的两个自由度。

C 组 · 拔高（综合与建模，★★★，约 24 分钟）

15. 【半正态分布 · 求常数 + MLE】🟧**真题骨架 2019•23**　设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$$

其中 μ **已知**，$\sigma>0$ 未知，A 为常数，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本。

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）求 σ^2 的极大似然估计量。

16. 【威布尔分布 · 无记忆性 + MLE】🟧**真题骨架 2020•23**　设某元件使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m}},\qquad t\geq 0,\quad \theta>0,\ m>0.$$

（Ⅰ）求 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$；

（Ⅱ）测得 n 个寿命值 $t_1,\cdots,t_n$，m **已知**，求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$。

17.【无偏 + 均方误差最小】🟧真题骨架 2024•22 设总体 $X \sim U(0,\theta)$，$\theta>0$ 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，构造 $T_c=cX_{(n)}$（$c>0$）。

（Ⅰ）求 c，使 T_c 为 θ 的**无偏估计**；

（Ⅱ）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c，使 $h(c)$ **最小**。

18.【假设检验概念综合】🟧真题骨架 2018•8 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，σ 已知，检验

$$H_0:\mu=\mu_0,\qquad H_1:\mu\neq\mu_0,$$

拒绝域为 $W=\{|\bar{X}-\mu_0|\geq c\}$。

（Ⅰ）判断下列结论中哪一个是**正确**的，并说明理由：

（A）若在 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0；

（B）若在 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0；

（C）若在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0；

（D）若在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0。

（Ⅱ）若 $n=16$，$\sigma=2$，取 $\alpha=0.05$（$u_{0.025}=1.96$），写出拒绝域的具体形式，并求当 $\mu=\mu_0+1$ 时犯**第二类错误**的概率（用 Φ 表示）。

> **做完后**：对 03-解析 逐题复盘；错题回挂 做题本；方法不熟的地方回查 01-考点手册 对应小节。