概率论 第5讲 · 大数定律与中心极限定理 · 考点手册

> **定位**：这一讲是**概率论 → 数理统计的过渡**，也是"极限行为"的收束。真题库 **第 19 章**近十年 **3 题**（2020·8 中心极限、2022·9 切比雪夫、2025·9 泊松近似），标注「冷门」，但**几乎年年有选填**，属"低投入、必拿分"板块。
> **用法**：先通读本手册建立框架 → 做 02-试题（16 题，约 70 分钟）→ 对 03-解析。
> **来源记号**：🟦 视频讲次 · 🟧 真题库 · 🟩 参考仓库。

---

0. 本讲定位与学习地图

一句话概括全讲：**大数定律管「均值稳定」，中心极限定理管「和的分布趋正态」**，而**切比雪夫不等式**是证明前者的工具。

三条主线（对应视频 4 个讲次）

讲次	主题	核心产出
01	基础知识结构	三条条件主线：**独立** · **期望存在** · **方差存在**
02	依概率收敛	极限的"概率语言"
03	大数定律	切比雪夫 / 伯努利 / 辛钦
04	中心极限定理	列维–林德伯格 / 棣莫弗–拉普拉斯 + 泊松近似

学习地图（依赖链）

```
依概率收敛（语言）
        |
切比雪夫不等式（工具）──→ 大数定律（均值 → 期望）
        |
        └──────────→ 中心极限定理（和 → 正态）
                                  |
                          三种近似：正态近似 / 泊松近似
```

> ⚠️ **全讲的三个"开关"**：① 是否**独立**（或两两不相关）；② **期望**是否存在；③ **方差**是否存在（辛钦不要求）。绝大多数概念题的答案就藏在这三点里。

---

1. 依概率收敛 🟦02🟩

1.1 定义

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}\ (n=1,2,\cdots)$。若对**任意** $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1,$$

则称 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于 X，记作

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad (n\to\infty).$$

1.2 为什么叫"依概率"（与数列极限的区别）

数列极限要求"**从某一项起，每一项都**落在邻域内"；依概率收敛只要求"**落在邻域外的概率趋于 0**"——**允许个别项"跑飞"，只要它们出现的概率越来越小。**

> **经典反例**（必看）：设
>
> $$P\left\{X_n=\frac{1}{n}\right\}=1-\frac{1}{n}, \qquad P\{X_n=n\}=\frac{1}{n}.$$
>
> 则对任意 $\varepsilon>0$，当 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时 $|X_n|\geq\varepsilon$ 只在 $X_n=n$ 时发生，故
>
> $$P\{|X_n|\geq\varepsilon\}=\frac{1}{n}\longrightarrow 0,$$
>
> 即 $X_n \xrightarrow{P} 0$。但 $EX_n=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+n\cdot\dfrac{1}{n}\to 1\neq 0$。
>
> **结论**：**依概率收敛 ⇏ 期望收敛**。这是本讲最容易被忽略的一点。

1.3 常用推论

- 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $X_n-X \xrightarrow{P} 0$；
- 若 $X_n \xrightarrow{P} c$（**常数**），则 $X_n^2 \xrightarrow{P} c^2$、$g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$（$g$ 连续）；
- 依概率收敛是**大数定律、数理统计中"一致性"**的统一语言。

---

2. 切比雪夫不等式（核心工具）🟧2022•9🟩

2.1 不等式

设随机变量 X 的 $EX=\mu$、$DX=\sigma^2$ **存在**，则对**任意** $\varepsilon>0$，

$$\boxed{P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}} \qquad \text{等价于} \qquad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

读法：**方差越小（波动越小），X 就越"集中"在期望附近**；ε 越大，$\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 越小、界越紧。

2.2 由来（理解即可，不必背证明）

设 X 连续、密度 f，记 $D=\{|x-\mu|\geq\varepsilon\}$。由"在 D 上 $\dfrac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}\geq 1$ "：

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,\mathrm{d}x\ \geq\ \int_D(x-\mu)^2f(x)\,\mathrm{d}x\ \geq\ \varepsilon^2\int_D f(x)\,\mathrm{d}x=\varepsilon^2P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}.$$

两边除以 ε^2 即得。

2.3 常用变形表

场景	结论
一般形式	$P\{\lvert X-\mu\rvert\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
取 $\varepsilon=k\sigma$ （$k>0$）	$P\{\lvert X-\mu\rvert\geq k\sigma\}\leq\dfrac{1}{k^2}$
样本均值 $\bar{X}$	$E\bar{X}=\mu,\ D\bar{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}\ \Rightarrow\ P\{\lvert\bar{X}-\mu\rvert\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$
二项 $X\sim B(n,p)$	$P\left\{\left\lvert\dfrac{X}{n}-p\right\rvert\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$
线性组合 $Z=X-Y$	先算 EZ，DZ，再代公式（要用 Cov）

2.4 使用三步

1. **锁定**被估计的随机变量 Y，算出 EY，DY （**不给就自己求**）；
2. 目标概率写成 $P\{|Y-EY|\geq\varepsilon\}$ （**偏离大 → 上界**）或 $P\{|Y-EY|<\varepsilon\}$ （**落在附近 → 下界**），定出 ε；
3. 代入。要"至少"写下界（$1-\cdots$），要"至多"写上界。

2.5 陷阱清单

陷阱	正确做法
方向搞反	$\geq\varepsilon$ 用 $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$；$<\varepsilon$ 用 $1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ （**对立事件**）
以为能求精确值	只给**界**，通常**很宽松**；优点是**不依赖具体分布**
$\bar{X}$ 的方差写成 σ^2	是 $\dfrac{\sigma^2}{n}$
$\frac{1}{n}\sum Y_i$ 漏除 n^2	$D\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\sum DY_i$ （独立/不相关时才可加）
不检查矩存在	必须 EY, DY **存在**
二项方差写成 np	是 $np(1-p)$

3. 大数定律 🟦03 🟩

3.1 共同形式

在满足一定条件下，**样本均值依概率收敛于期望的均值**：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i \qquad (\text{即 } \bar{X} \xrightarrow{P} E\bar{X}).$$

> **考法**：大数定律**几乎不考计算**，只考「**定律成立的条件**」与「**结论是否正确**」——即判断某个序列是否满足独立/不相关、期望是否存在、方差是否有界。

3.2 切比雪夫大数定律

条件：$\{X_n\}$ **相互独立**（不要求同分布）；EX_i 存在，且 DX_i **存在且一致有上界**（$\exists C$，使 $DX_i \le C$ 对一切 i 成立）。

结论：$\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$。

证明（用切比雪夫不等式 + 夹逼）：

$$E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum EX_i, \qquad D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum DX_i \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

$$1 \ge P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum EX_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

由**夹逼定理**得结论。■

> **证明的钥匙**：**「不相关」用来消掉协方差项**，使 $D(\sum X_i) = \sum DX_i$；再除以 n^2 得 $\frac{C}{n} \to 0$。

例题（🟩 仓库）：设 $\{X_n\}$ 相互独立，$X_n \sim E(n)$（参数为 n 的指数分布），则下列序列中**不**服从切比雪夫大数定律的是（ ）。

（A）$X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$　（B）$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$　（C）$X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　（D）$X_1, 2^2X_2, \cdots, n^2X_n, \cdots$　→ **D**。

（因 $X_n \sim E(n)$ 时 $DX_n = \frac{1}{n^2}$，四个选项的方差依次为 $\frac{1}{n^4}, \frac{1}{n^2}, 1, n^2$，只有 D 无界。）

3.3 伯努利大数定律

条件：μ_n 为 n 重伯努利试验中事件 A（每次概率 p，$0 < p < 1$）发生的次数。

结论：$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$。

证明：$\mu_n \sim B(n,p)$，$E\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$，$D\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$，切比雪夫 + 夹逼即得。

> **意义**：这是"**频率稳定于概率**"的严格表述，也是概率的频率定义的依据。

3.4 辛钦大数定律

条件：$\{X_n\}$ **相互独立**且**同分布**；$EX_i=\mu$ **存在（不要求方差存在）**。

结论：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$ 。

> **与切比雪夫的区别**：辛钦要求**同分布**但**不要求方差**；切比雪夫**不要求同分布**但要求**方差一致有界**。因为不要求方差，辛钦**不能**用切比雪夫不等式证明。

例题（🟩 仓库）：设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立，根据辛钦大数定律，当 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{n}\sum X_i$ 依概率收敛于数学期望，只要 $\{X_n\}$（ ）。

（A）有相同的数学期望　（B）服从同一离散型分布　（C）服从同一泊松分布　（D）服从同一连续型分布　→ **C。**

（辛钦要**同分布 + 期望存在。**B、D 只说"同一类型分布"不保证期望存在；A 只是"期望相同"不保证同分布；C 既同分布（泊松）又期望存在。）

例题：将一枚骰子重复投掷 n 次，$\bar{X}$ 为点数的算术平均，则 $\bar{X}\xrightarrow{P}?$

（独立、同分布、期望存在 $\mu=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}i=3.5 \Longrightarrow$ 由辛钦，$\bar{X}\xrightarrow{P}3.5$ 。）

3.5 三条定律对照（高频辨析）

定律	独立/相关	同分布	期望	方差
切比雪夫	相互独立（或两两不相关）	**不要求**	存在	**存在且一致有界**
伯努利	伯努利试验（天然独立）	是（0–1 分布）	存在	存在（$p(1-p)$）
辛钦	相互独立	**要求**	**存在**	**不要求**

> **记忆**：**"切比雪夫看方差、辛钦看分布"**——两者都不要同分布/不要方差，正好互补；伯努利是二项的特例。

---

4. 中心极限定理 🟦04 🟧2020•8 🟩

4.1 共同形式

若 X_i 独立同分布（或"近似"),则**和**的分布趋于正态：

$$\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu,\, n\sigma^2) \qquad (n\text{ 充分大}).$$

> **与两大数定律的分工**：大数定律说"**均值趋于常数**"，中心极限定理说"**围绕该常数的波动趋于正态**"——后者信息更细。
> **实用门槛**：n 一般 **≥ 30**（若接近对称，$n \geq 10$ 也可）即可使用。

4.2 列维–林德伯格定理（独立同分布版）

条件：$\{X_n\}$ **独立同分布**，$EX_i = \mu$ 、$DX_i = \sigma^2 > 0$ （**存在**）。

结论：对任意实数 x ，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x),$$

即

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1), \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu,\, n\sigma^2).$$

4.3 棣莫弗–拉普拉斯定理（二项版）

条件：$Y_n \sim B(n,p)$ （$0 < p < 1$ ）。

结论：

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1), \qquad Y_n \overset{\text{近似}}{\sim} N\big(np,\, np(1-p)\big).$$

> 即**二项分布的正态近似**：n 大、且 np 与 $n(1-p)$ 都不太小时使用。

4.4 标准化四步模板（考场流程）

1. **定 T **：把要求的概率写成"**和**"的形式 $T = \sum X_i$ （或 Y_n ）；
2. **算 ET, DT **：$ET = n\mu$ ，$DT = n\sigma^2$ （二项：np 、$np(1-p)$ ）；
3. **标准化**：$\dfrac{T - ET}{\sqrt{DT}} \approx N(0,1)$ ，把不等式两边同减同除；
4. **查 Φ **：$P\{Z \leq z\} = \Phi(z)$ 、$P\{Z > z\} = 1 - \Phi(z)$ 、$P\{|Z| \leq z\} = 2\Phi(z) - 1$ 。

> ⚠️ **连续性修正**一般不要求（考研多数不修正）；若题目给的 Φ 值与"严格/非严格不等号"有关，按 $P\{T \leq k\} \approx \Phi\left(\dfrac{k - ET}{\sqrt{DT}}\right)$ 处理。

4.5 例题（🟩 仓库）

某生产线每件产品重量随机，平均 50 kg、标准差 5 kg。载重 5 吨的汽车承运，问**最多**装多少箱可保证**不超载**的概率大于 0.977？ （$\Phi(2) = 0.977$ ）

设第 i 箱重量 X_i，$EX_i=50$、$DX_i=25$。记 $T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $ET_n=50n$、$DT_n=25n$、$\sqrt{DT_n}=5\sqrt{n}$。

$$P\{T_n\le 5000\}\approx\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2)\implies\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\ge 2\implies n\le 98.$$

5. 三种「近似」辨析（正态近似 / 泊松近似） 🟧2025•9

二项分布 $B(n,p)$ 有**两种**近似，**用哪个取决于 p 的大小**：

近似	适用条件	结果	典型题
正态近似（棣莫弗–拉普拉斯）	n 大，p **不太小也不太大**（$np(1-p)$ 较大，经验 $np\ge 5, n(1-p)\ge 5$）	$\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\approx N(0,1)$	🟧 2020·8
泊松近似	n 大，p **很小**（$np=\lambda$ 适中）	$Y_n\approx P(\lambda),\ \lambda=np$	🟧 2025·9

判别口诀："n **大** p **不极端 → 正态；** n **大** p **很小 → 泊松。**"

例题（🟧 2025·9 骨架）：$X_i\sim B(1,0.01)$（$i=1,\cdots,300$），$T=\sum X_i$，求 $P\{T\le 1\}$ 的近似值。

$T\sim B(300,0.01)$，p 很小，取 $\lambda=np=3$，$T\approx P(3)$：

$$P\{T\le 1\}\approx P\{T=0\}+P\{T=1\}=e^{-3}(1+3)=4e^{-3}.$$

对照（🟧 2025·9 原题）：$X_i\sim B(1,0.1)$，$n=20$，$\lambda=2$，$P\{T\le 1\}\approx e^{-2}(1+2)=3e^{-2}$。

6. 十年真题落点地图（🟧 第 19 章 3 题）

年份•题号	分值	考法	关键动作	本手册节
2020•8	4	中心极限定理（0–1 变量求和）	标准化 + 查 Φ	§4.4
2022•9	5	大数定律（切比雪夫不等式）	换 $Y_i=X_i^2$，$DY_i=\mu_4-\mu_2^2$	§2.3
2025•9	5	泊松近似（二项分布）	$\lambda=np$，$P\{T\le 1\}=e^{-\lambda}(1+\lambda)$	§5

跨章牵连（数字特征）：2017·14（期望）、2020·14（协方差）、2022·8（方差）、2025·8（线性组合方差最值）——本讲所有计算都建立在这些之上。

> **规律**：本讲**只出选填**（4–5 分），十年 3 题全部是**单选**，且**每 4–5 年一轮**（2020、2022、2025）。属于"**背条件 + 套模板**"就能拿分的题型。

7. 速查卡 • 陷阱清单

7.1 速记八条

1. **依概率收敛**：$\forall \varepsilon > 0$，$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0$；**允许个别项跑飞**；
2. **依概率收敛 ⇏ 期望收敛**（$X_n = \frac{1}{n}$ 概率 $1 - \frac{1}{n}$ 、$= n$ 概率 $\frac{1}{n}$ ）；
3. **切比雪夫不等式**：$\geq \varepsilon$ 给上界 $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，$< \varepsilon$ 给下界 $1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，**只给界不给精确值**；
4. **切比雪夫大数定律**：不相关 + 方差**一致有界**；**辛钦**：独立同分布 + 期望存在（**不要方差**）；
5. **伯努利大数定律** = "频率稳定于概率"；
6. **中心极限定理**：$\dfrac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx N(0,1)$，$n \geq 30$ 可用；
7. **二项近似二选一**：p 不极端 → **正态**；p 很小 → **泊松**（$\lambda = np$ ）；
8. **大数定律考条件、中心极限定理考计算。**

7.2 高频陷阱

陷阱	正确做法
把"依概率收敛"当"处处收敛"	是**概率**趋于 0，不是每一项都收敛
用依概率收敛推期望收敛	**不成立**（见速记 2）
切比雪夫不等式方向搞反	要"$\geq \varepsilon$ "写上界；要"$< \varepsilon$ "写 $1-$
反解 n 时忘记 $\bar{X}$ 方差是 σ^2/n	$D\bar{X} = \dfrac{\sigma^2}{n}$
辛钦大数定律要求方差	**不要求**，只要求独立同分布 + 期望存在
二项用泊松近似时 λ 取错	$\lambda = np$ （不是 n 也不是 p ）
正态近似时方差用 σ^2 而非 $n\sigma^2$	$D(\sum X_i) = n\sigma^2$，标准差是 $\sqrt{n}\,\sigma$
样本均值型题忘记 $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$	先除 n^2：$D\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum DY_i$

> **下一步**：开做 02-试题（16 题，约 70 分钟）。做完对 03-解析，错题回挂 做题本。