错题锻炼 8.31

— 题目打印版 —

□ 每道题占一页，便于在平板上书写
□ 答案统一在最后

训练场 1：极限计算的复合陷阱

主打薄弱点：极限中含积分 + 隐性分段 + e的定义式

题 1.1【□□】

求极限：$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x |t| \sin t \, dt}{x^3}$

识别信号：积分号里被积函数含 $|t|$ → 隐性分段；x 在积分限上 → 类型一；分母 x^3 → 分子需展到 x^3 阶

【留空区域】

题 1.2【□□】

求极限：$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{|t|} dt}{x}$

注意：$\frac{1}{|t|}$ 在 $t = 0$ 处需小心处理。

识别信号：被积函数显含 x ➔ 类型二；积分区间是常数 ➔ 含参积分

【留空区域】

题 1.3【□□□】

求极限：$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{(t-x)^2} - 1 - (t-x)^2) \sin t \, dt}{x^7}$

识别信号：积分限含 x^2，被积函数也含 x ➔ 类型一/二杂交型；e^u-1-u 是经典"对消后首项"形式

【留空区域】

题 1.4【□□】

求极限：$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n + \sqrt[n]{n}}{n}\right)^n$

识别信号：底数是分式 → 改写成 $1 + \text{小量}$；小量 $\to 0$，指数 $\to \infty$ → 1^∞ 型

【留空区域】

题 1.5【□□□】

设 $x_n = \left(1 + \dfrac{\sin n}{n}\right)^{n}$，求 $\lim_{n \to \infty} x_n$。

识别信号：1^∞ 型；$\sin n$ 在整数 n 处振荡，不收敛

【留空区域】

题 1.6【□□□】

求极限：$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

识别信号：底数 $\to 1$，指数 $\to \infty$ ➡ 1^∞ 型；不是 $(1+1/n)^n$ 形式

【留空区域】

题 1.7【□□□】

设 $f(x) = \dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \cdot \operatorname{sgn}(x)$，问 $\lim_{x \to 0} f(x)$ 是否存在？

识别信号：同时含 $e^{1/x}$（必分左右）和 $\operatorname{sgn}(x)$（隐性分段）

【留空区域】

题 1.8【□□□】

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增，$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$。问 $\lim_{x \to 1} f^{-1}(x)$ 是否存在？若存在，求其值。

识别信号：严格单调递增 → 反函数存在；$\lim f(x)=1$ 但永远取不到 → 值域开区间

【留空区域】

训练场 2：泰勒展开的精准打击

主打薄弱点：渐近展开 + 精度丢失陷阱

题 2.1【□□】

求当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}$ 的等价无穷小主项（即 $\sim ax^b$）。

识别信号：减法形式，且两项端点都是 1；必须先做"主部对消"判断

【留空区域】

题 2.2【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^4}$

识别信号：$\ln(1+x)$ 的前三阶项被对消；分母 x^4 → 必须展到 x^4 阶

【留空区域】

题 2.3【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^5}$

识别信号：两个奇函数的差；分母 x^5 → 必须展到 x^5

【留空区域】

题 2.4【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}}{x^3}$

识别信号：$\sqrt[3]{1+x}$ 的前两项被对消 → 必须 Taylor 展到 x^3

【留空区域】

题 2.5【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \left[\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n} \right]$

识别信号：数列极限，$n \to \infty$；主部对消

【留空区域】

题 2.6【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right]$

识别信号：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$（$\searrow$ 趋近）；注意是 $n+1$ 次方！

【留空区域】

题 2.7【□□□】

求 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n\left[e^2 - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]$

识别信号：$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \to e^2$（标准形式）

【留空区域】

题 2.8【□□□□】

设 $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$，求 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n a_n}{\ln n}$。

识别信号：$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$；第一阶展开就是 $\frac{\ln n}{n}$

【留空区域】

题 2.9【□□□】

设 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$，求 $f^{(10)}(0)$。

识别信号：用 Taylor 展开反推高阶导数

【留空区域】

题 2.10【□□□□】

用 $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ 近似 $\cos x$，问 $|x| \le \delta$ 时，误差不超过 $\epsilon = 10^{-4}$ 的最大 δ 是多少？

进一步求 $\displaystyle\lim_{\delta \to 0^+} \dfrac{1}{\delta^4} \int_0^{\delta} \left[\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right] dx$

识别信号：拉格朗日余项；积分后求极限 → 类型一变限积分

【留空区域】

训练场 3：间断点的多维识别

主打薄弱点：隐性分段 + 反函数间断点 + 间断点判定全链路

题 3.1【□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

(1) 判断 f 是否严格单调？ (2) 若有反函数，求 $f^{-1}(x)$ 的间断点及类型。

识别信号：分段函数 + 求反函数 → 反函数专题

【留空区域】

题 3.2【□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$

(1) 证明 f 严格单调递增；(2) 求 $f^{-1}(x)$；(3) 求 f^{-1} 的间断点。

识别信号：切换点 $x = 1$ 处需验证左右极限

【留空区域】

题 3.3【□□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, -1] \\ x, & x \in (-1, 1) \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 4] \end{cases}$

求 f 的值域和反函数的间断点。

识别信号：三段函数，每段都是严格单调；切换点处必算左右极限

【留空区域】

题 3.4【□□□】

设 $f(x)$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$，$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8$，且 $f(2) = 5$。

求 $f^{-1}(x)$ 的间断点。

识别信号：已知原函数在 $x_0 = 2$ 处可去间断 vs 跳跃需判断

【留空区域】

题 3.5【□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x}, & x \ne 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

(1) a 取何值时 f 在 $x = 0$ 连续？ (2) 第一类间断点？ (3) 第二类间断点？

识别信号：含参 + 间断点分类 ➜ 必须对 a 分类讨论

【留空区域】

题 3.6【□□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x}, & x < 0 \end{cases}$

(1) 求 $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$; (2) a 取何值连续? (3) 跳跃间断点?

识别信号：两侧极限需要分别算（不同表达式）

【留空区域】

题 3.7【□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$，问 a 取何值时 f 在 $x = 0$ 连续？

识别信号：$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时振荡发散

【留空区域】

题 3.8【□□□】

设 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续，$f(u) = \begin{cases} u, & u \ne 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}$，问 $f(g(x))$ 在 $x = 0$ 处连续吗？

识别信号：复合函数连续性判定；关键是看 $g(x_0)$ 处的 f 是否连续

【留空区域】

题 3.9【□□□□】

设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$，$g(x) = x^2$。

求 $f(g(x))$ 的间断点。

识别信号：$g(x) = x^2 \ge 0$，始终落在 f 的 $x \ge 0$ 段

【留空区域】

题 3.10【□□□□□】

设 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$（Cauchy 方程），且 f 在 $x = 0$ 连续。证明：

(1) f 在 $\mathbb{R}$ 上连续； (2) $f(x) = f(1) \cdot x$（线性）。

识别信号：Cauchy 方程 + 连续 → 推线性；抽象函数间断点判定

【留空区域】

训练场 4：链式法则的反直觉

主打薄弱点：复合函数的连续性与可导性 + 隐性分段 + 间断点

题 4.1【□□□】

设 $f(u) = u^2$，$g(x) = |x|$，$F(x) = f(g(x))$。

(1) $F(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续？是否可导？ (2) 求 $F'(0)$（如果存在）。

识别信号：内层 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导（折角）；外层 u^2 是好函数；不能套链式法则！

【留空区域】

题 4.2【□□□】

设 $f(u) = |u|$，$g(x) = x$，$F(x) = f(g(x))$。$F(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导？

识别信号：外层 $|u|$ 不可导，内层 $g(x) = x$ 光滑

【留空区域】

题 4.3【□□□】

设 $f(u) = u^3$，$g(x) = |x|$，$F(x) = f(g(x)) = |x|^3$。

(1) $F(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导？ (2) 若可导，求 $F'(0)$。

识别信号：$|x|^3$ 是奇数次方（幂函数磨平折角）

【留空区域】

题 4.4【□□□□】

设 $f(u) = |u|$，$g(x) = |x|$，$F(x) = f(g(x))$。

(1) 化简 $F(x)$；(2) 讨论 F 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性。

识别信号：双重折角

【留空区域】

题 4.5【□□□】

设 $f(u) = u^2$，$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$，$F(x) = f(g(x))$。

(1) 化简 $F(x)$；(2) 讨论 F 在 $x = 0$ 的可导性。

识别信号：外层光滑 $f(u) = u^2$；内层分段 g，g 在 0 处不可导

【留空区域】

题 4.6【□□□】

设 $f(u) = \begin{cases} u+1, & u \ge 0 \\ -u, & u < 0 \end{cases}$，$g(x) = x^2$，$F(x) = f(g(x))$。

讨论 F 在 $x = 0$ 处的连续性、可导性。

识别信号：$g(x) = x^2 \ge 0$，值域绕开了 f 的 $u < 0$ 段

【留空区域】

题 4.7【□□□□】

设 $f(u)$ 在 $u = 0$ 二阶可导，$f(0) = 1$，$f'(0) = 2$，$f''(0) = 3$；$g(x) = x^2$。

求 $\dfrac{d^2}{dx^2} f(g(x)) \big|_{x = 0}$。

识别信号：二阶链式法则

【留空区域】

题 4.8【□□□□】

求 $\dfrac{dy}{dx}\big|_{x=0}$，其中 $y = e^{\sin^2(x^3)}$。

识别信号：4 层嵌套；漏乘任何一层导数 = 错

【留空区域】

题 4.9【□□□】

已知 $f(u)$ 在 $u = 1$ 连续，$g(x)$ 在 $x = 0$ 连续，$g(0) = 1$。

问 $F(x) = f(g(x))$ 在 $x = 0$ 是否连续？

识别信号：链式连续定理

【留空区域】

题 4.10【□□□□】

已知 $F(x) = f(g(x))$ 在 $x = 0$ 连续。能否推出 f 在 $g(0)$ 处连续？

识别信号：连续性反推陷阱；反推不成立

【留空区域】

题 4.11【□□□□】

设 $f(u)$ 在 $u = 0$ 可导，$g(x)$ 在 $x = 0$ 可导，$g(0) = 0$。$F(x) = f(g(x))$ 在 $x = 0$ 可导，问 $F'(0) = ?$

识别信号：标准链式法则应用

【留空区域】

题 4.12【□□□□□】

设 $f(u)$ 在 $u = 0$ 可导，$f(0) = 0$，$f'(0) = 2$；$g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$（$x \ne 0$），$g(0) = 0$。

讨论 $F(x) = f(g(x))$ 在 $x = 0$ 的连续性与可导性。

识别信号：$g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导？

【留空区域】

训练场 5：递推压轴

主打薄弱点：隐式递推 + 渐近阶数 + 构造辅助函数

题 5.1【□□□□】

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$，$x_1 \in (0, 1)$。

(1) 证明 $\lim x_n$ 存在并求值；(2) 求 $\lim n x_n$。

识别信号：显式递推 $x_{n+1} = f(x_n)$；$f(0) = 0$ 是不动点

【留空区域】

题 5.2【□□□□】

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\sin x_{n+1} + x_{n+1} = \sin x_n$，$x_n \in (0, \pi)$。

(1) 证明 $\lim x_n$ 存在并求值； (2) 求 $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$。

识别信号：隐式递推；必须构造辅助函数

【留空区域】

题 5.3【□□□□】

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$（$a > 0$，牛顿迭代）。

(1) 证明 $\lim x_n = \sqrt{a}$；(2) 求 $\lim \dfrac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{(x_n - \sqrt{a})^2}$。

识别信号：牛顿迭代法；误差是平方级 ➜ 二次收敛

【留空区域】

题 5.4【□□□□】

设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$。

(1) 证明 $\lim x_n = 0$； (2) 求 $\lim \sqrt{n} \cdot x_n$。

识别信号：$\sin x \approx x - x^3/6$；用 Stolz-Cesàro 处理慢收敛

【留空区域】

题 5.5【□□□□】

设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{n + x_n}$。

(1) 证明 $x_n \to +\infty$； (2) 求 $\lim \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$。

识别信号：递推式中含 n，需分析增长速度

【留空区域】

终极综合卷

难度：□□□□ | 题量：8道 | 满分：100分

题 1【□□□】选择题

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x \ne 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$，问 a 取何值时 f 在 $x = 0$ 处可导？

A. $a = 0$　B. $a = 1$　C. $a = 2$　D. 无论 a 取何值都不可导

【留空区域】

题 2【□□□】选择题

求 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - 1 - t) \sin(xt) \, dt}{x^7}$。

A. 0 B. $\dfrac{1}{60}$ C. $\dfrac{1}{30}$ D. $\dfrac{1}{12}$

【留空区域】

题 3【□□□】选择题

设 $f(x) = |x| \sin x$，问 f 在 $x = 0$ 处是否可导？若可导，$f'(0) = ?$

A. 不可导 B. 可导，$f'(0) = 1$ C. 可导，$f'(0) = 0$ D. 可导，$f'(0) = -1$

【留空区域】

题 4【□□□】选择题

求 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} n^2\left[\sqrt[n]{n} - 1 - \frac{\ln n}{n}\right]$

A. 0 B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{(\ln n)^2}{2n}$ D. 不存在

【留空区域】

题 5【□□□ · 20分】解答题

求 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$。

识别信号：多函数乘积 → Taylor 展开到 x^2 阶

【留空区域】

题 6【□□□□ · 20分】解答题

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{1/2}}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，问 f 在 $x = 0$ 处的间断点类型。

识别信号：$|x|^{-1/2}$ 在 $x = 0$ 处 → 看是否发散

【留空区域】

题 7【□□□□ · 20分】解答题

求 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$。

识别信号：求和式 + $n \to \infty$ → 定积分定义

【留空区域】

题 8【□□□□□ · 20分】解答题

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \cos x_n + \ln(1 + x_n)$，$x_1 \in (0, 1)$。

(1) 证明 $\lim x_n$ 存在； (2) 求 $\lim x_n$； (3) 求 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\sqrt{1 - \cos x_n}}$。

识别信号：显式递推；不动点分析；渐近阶数

【留空区域】

答 案 部 分

请先完成所有题目后再翻阅此处

训练场 1 答案

题 1.1 答案：$\boxed{\dfrac{1}{3}}$

解析：拆绝对值 → 分部积分 → Taylor展开 → 分子 $\frac{x^3}{3}+0(x^5)$，除以 x^3 得 $\frac{1}{3}$

题 1.2 答案：$\boxed{1}$

解析：换元 $u=xt$ → $\int_0^x \frac{\sin u}{u}du \sim x$ → $\frac{x}{x}=1$

题 1.3 答案：$\boxed{0}$

解析：估阶：被积函数 $0(x^6)$，积分区间长 x^2 → 整体 $0(x^8)$，高于分母 x^7 → 极限=0

题 1.4 答案：$\boxed{e}$

解析：改写为 $(1+n^{1/n}-1)^n$，$n\cdot(n^{1/n}-1)=n^{1/n}\to1$ → $e^1=e$

题 1.5 答案：$\boxed{\text{极限不存在}}$

解析：$\ln x_n \sim \sin n$ 振荡不收敛 → x_n 无极限

题 1.6 答案：$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

解析：取对数 → 展开 $\ln(1+x)/x$ → 再取对数 → $\ln L = -\frac{1}{2}$ → $L=e^{-1/2}$

题 1.7 答案：$\boxed{1}$

解析：$x\to0^+$ 时 $f(x)\to1$；$x\to0^-$ 时 $f(x)\to1$，左右极限相等

题 1.8 答案：$\boxed{\text{极限不存在（发散到 }+\infty\text{）}}$

解析：f 值域 $(0,1)$ → f^{-1} 定义域 $(0,1)$，$x\to1^-$ 时 $f^{-1}(x)\to+\infty$

训练场 2 答案

题 2.1 答案：$\boxed{\sim \dfrac{5x}{2}}$

解析：二项展开 → 相减 → 主项 $\frac{5x}{2}$

题 2.2 答案：$\boxed{-\dfrac{1}{4}}$

解析：展开 $\ln(1+x)$ 到 x^4 → 代入 → $-\frac{x^4}{4}$ → $-1/4$

题 2.3 答案：$\boxed{\text{不存在（发散到 }-\infty\text{）}}$

解析：分子最低阶 x^3，分母 x^5 → 阶数不匹配 → 发散

题 2.4 答案：$\boxed{\dfrac{5}{81}}$

解析：三项式展开 → 前两项对消 → 剩 $\frac{5x^3}{81}$ → 极限 $\frac{5}{81}$

题 2.5 答案：$\boxed{0}$

解析：$\ln(1+1/n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+...$ → $n[-\frac{1}{2n^2}]\to0$

题 2.6 答案：$\boxed{\text{不存在（发散到 }+\infty\text{）}}$

解析：$(1+1/n)^{n+1}-e\sim\frac{e}{2n}$ → $n^2\cdot\frac{e}{2n}=\frac{en}{2}\to+\infty$

题 2.7 答案：$\boxed{2e^2}$

解析：展开 $(1+2/n)^n=e^2(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})$ → $n[2e^2/n]\to2e^2$

题 2.8 答案：$\boxed{1}$

解析：$\sqrt[n]{n}=e^{\ln n/n}=1+\frac{\ln n}{n}+...$ → $na_n\sim\ln n$ → 比值为1

题 2.9 答案：$\boxed{3628800}$

解析：$f(x)=\sum(-1)^nx^{2n+2}$ → x^{10} 项系数1 → $f^{(10)}(0)=10!=3628800$

题 2.10 答案：$\delta\le\sqrt[3]{6\times10^{-4}}\approx0.084$，极限 $=0$

解析：拉格朗日余项 $\le\delta^3/6$；积分后 $\frac{\delta^5}{120}$ → $\frac{\delta}{120}\to0$

训练场 3 答案

题 3.1 答案：$\boxed{\text{反函数不存在}}$

解析：$f(0^-)=1$，$f(0^+)=0$ 跳跃 → 不严格单调 → 反函数不存在

题 3.2 答案：$\boxed{\text{无间断点}}$

解析：$f(1^-)=f(1^+)=f(1)=3$ 连续 → f^{-1} 连续

题 3.3 答案：$\boxed{\text{反函数不存在（值域重叠）}}$

解析：三段值域 $[1,4]$、$(-1,1)$、$[1,2]$ 重叠，不一一对应

题 3.4 答案：$\boxed{x=5\text{ 和 }x=8\text{，均为第一类跳跃间断点}}$

解析：f 在 $x=2$ 处跳跃间断 $(5,8)$ → 反函数在 $x=5,8$ 处各有跳跃间断

题 3.5 答案：(1) $a=2$ 时连续；(2) $a\neq2$ 时可去；(3) 无第二类

解析：$\lim\frac{\sin2x}{x}=2$ 存在 → $a=2$ 连续，$a\neq2$ 可去，a 任意都不是第二类

题 3.6 答案：(1) 两边均 $=1$；(2) $a=1$；(3) 不可能跳跃

解析：左右极限相等 → $a=1$ 连续；$a\neq1$ 可去（不是跳跃！）

题 3.7 答案：$\boxed{\text{无论 }a\text{ 取何值均不连续}}$

解析：子列极限不同 → 振荡间断点（第二类）

题 3.8 答案：$g(0)\neq0$ 时连续；$g(0)=0$ 时可去间断

解析：关键看 f 在 $u=g(0)$ 处是否连续

题 3.9 答案：$\boxed{\text{无间断点}}$

解析：$g(x)=x^2\ge0$ → $f(g(x))=x^2+1$ 连续

题 3.10 答案：$f(x)=f(1)\cdot x$

解析：Cauchy方程+连续 → $f(0)=0$ → 连续 → 有理数 → 实数 → $f(x)=cx$

训练场 4 答案

题 4.1 答案：$\boxed{F\text{连续、可导，}F'(0)=0}$

解析：$F(x)=(|x|)^2=x^2$，折角被 u^2 磨平了

题 4.2 答案：$\boxed{F\text{ 不可导}}$

解析：$F(x)=|x|$，左右导数 ±1 不等 $\Rightarrow$ 不可导

题 4.3 答案：$\boxed{F\text{ 可导，}F'(0)=0}$

解析：$|\Delta x|^3/\Delta x=|\Delta x|^2\to0$

题 4.4 答案：$\boxed{F\text{ 连续但不可导}}$

解析：$F(x)=||x||=|x|$，双重绝对值不磨平折角

题 4.5 答案：$\boxed{F\text{ 不可导}}$

解析：$F'(0^+)=2$，$F'(0^-)\to\pm\infty$，左右导数不相等

题 4.6 答案：$\boxed{F\text{ 连续、可导，}F'(0)=0}$

解析：$g(x)=x^2\ge0$ $\Rightarrow$ $F(x)=x^2+1$

题 4.7 答案：$\boxed{4}$

解析：二阶链式：$=4x^2f''(g(x))+2f'(g(x))$ $\Rightarrow$ 代入 $x=0$ $\Rightarrow$ $2f'(0)=4$

题 4.8 答案：$\boxed{0}$

解析：4层链式：$=6x^2\sin(x^3)\cos(x^3)e^{\sin^2(x^3)}$ $\Rightarrow$ 代入 $x=0$ $\Rightarrow$ 0

题 4.9 答案：$\boxed{F\text{ 在 }x=0\text{ 连续}}$

解析：链式连续定理：g 连续 $\Rightarrow\lim g(x)=1$，f 在 $u=1$ 连续

题 4.10 答案：$\boxed{\text{不能推出}}$

解析：反例 $f(u)=\begin{cases}1,&u;\ge0\\2,&u;<0\end{cases}$，$g(x)=x^2$

题 4.11 答案：$\boxed{f'(0)\cdot g'(0)}$

解析：链式法则：$F'(0)=f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(0)\cdot g'(0)$

题 4.12 答案：$\boxed{F\text{ 连续、可导，}F'(0)=0}$

解析：$g'(0)=\lim x\sin(1/x)=0$ $\Rightarrow$ $F'(0)=f'(0)\cdot0=0$

训练场 5 答案

题 5.1 答案：(1) $\lim x_n=0$；(2) $\lim nx_n=2$

解析：(1) $f'(x)<1$ 递减有下界 → 极限 $a=\ln(1+a)\Rightarrow a=0$

(2) $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{2}$ → $\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\to\frac{1}{2}$ → $nx_n\to2$

题 5.2 答案：(1) $\lim x_n=0$；(2) $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$

解析：构造 $f(x)=\sin x+x$ → $f(x_{n+1})=\sin x_n<x_{n+1}$ → 递减 → $a=0$

$2x_{n+1}=x_n+O(x_n^3)$ → $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to\frac{1}{2}$

题 5.3 答案：(1) $\lim x_n=\sqrt a$；(2) $\lim\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{1}{2\sqrt a}$

解析：AM-GM → $x_{n+1}\ge\sqrt a$；$e_{n+1}=\frac{e_n^2}{2x_n}$ →
$\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{1}{2x_n}\to\frac{1}{2\sqrt a}$

题 5.4 答案：(1) $\lim x_n=0$；(2) $\lim\sqrt n\cdot x_n=\sqrt3$

解析：$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3}{6}$ → $\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\to\frac{1}{3}$ →
$nx_n^2\to3$ → $\sqrt n\cdot x_n\to\sqrt3$

题 5.5 答案：(1) $x_n\to+\infty$；(2) $\lim\frac{x_n}{\sqrt n}=1$

解析：$x_{n+1}^2=n+x_n\ge n$ → $x_n\ge\sqrt{n-1}\to+\infty$

设 $y_n=x_n^2/n$ → $y_{n+1}=\frac{n+x_n}{n+1}\to1$ → $x_n/\sqrt n\to1$

终极综合卷答案

选择题

题1：$\boxed{A}$ —— $a=0$ 时 $f'(0)=1$ 存在；$a\neq0$ 时 $\frac{a}{x}$ 发散

题2：$\boxed{A}$ —— 分子 $0(x^9)$，分母 x^7 → 极限0

题3：$\boxed{C}$ —— $\frac{|x|\sin x}{x}=|x|\cdot\frac{\sin x}{x}\to0$

题4：$\boxed{D}$ —— $(\ln n)^2/2 \to +\infty$

解答题

题5：$\boxed{3}$ —— 三函数展开乘积：$(1-\frac{x^2}{2})(1-x^2)(1-\frac{3x^2}{2})=1-3x^2$

题6：$\boxed{\text{第二类·无穷间断点}}$ —— $\lim\frac{1}{|x|^{1/2}}=+\infty$

题7：$\boxed{\frac{4(\sqrt2+1)}{15}}$ —— 黎曼和 $\to\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx$

题8：(1)存在；(2)$a\approx1.164$；(3)$\sqrt2$

解析：$f(x)=\cos x+\ln(1+x)$，$|f'(a)|<1$ 压缩映射；$1-\cos x_n\sim x_n^2/2$